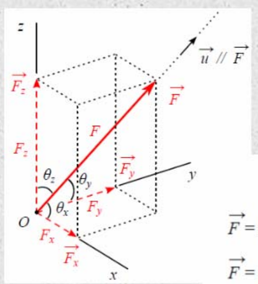
Mühendislik Mekaniği (STATiK)

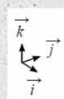
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Alpaslan KÖROĞLU

3 boyutlu kuvvet sistemleri

Bu sunumun hazırlanmasında Doç. Dr. Behçet Dağhan'ın ders notlarından faydalanılmıştır.

Dik Bileşenler





$$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z}$$

$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\,\underbrace{(l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k})}_{=\,\vec{u}}$$

$\vec{F}$ ile aynı yöndeki birim vektör

$$\boxed{\vec{F} = F\,\vec{u}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F^2 &= F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \\ F_x &= F\cos\theta_x = F\,l \\ F_y &= F\cos\theta_y = F\,m \\ F_z &= F\cos\theta_z = F\,n \end{aligned}}$$

Doğrultman kosinüsleri

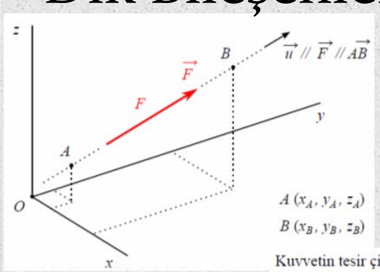
$l = \cos\theta_x$

$m = \cos\theta_y$

$n = \cos\theta_z$

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$

Dik Bileşenler



$A\,(x_A, y_A, z_A)$

$B\,(x_B, y_B, z_B)$

Kuvvetin tesir çizgisi üzerindeki A ve B gibi iki noktanın koordinatları biliniyorsa:

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{AB}$$

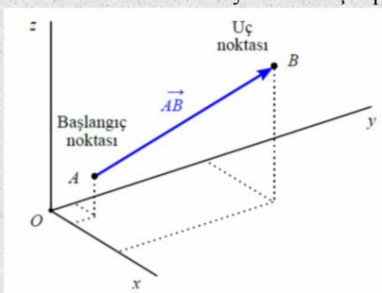
AB vektörü,
uç noktasının koordinatlarından
başlangıç noktasının koordinatları çıkarılarak yazılır.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{F} = F\,\frac{\vec{AB}}{AB}}$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Başlangıç ve uç noktasının koordinatları bilinen bir vektörün birim vektörler cinsinden yazılması için pratik bir yol:



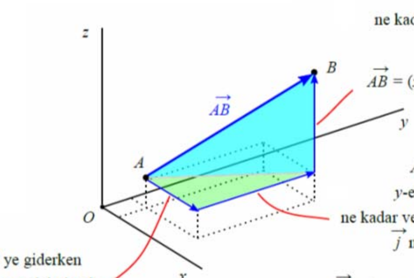
$A\,(x_A, y_A, z_A)$

$B\,(x_B, y_B, z_B)$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k}$$

A dan *B* ye giderken
z-eksenine paralel olarak
ne kadar ve ne yönde gittiğimize bakarak
$\overrightarrow{k}$ nın katsayısını buluruz.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k}$$



A dan *B* ye giderken
y-eksenine paralel olarak
ne kadar ve ne yönde gittiğimize bakarak
$\overrightarrow{j}$ nin katsayısını buluruz.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k}$$

A dan *B* ye giderken
x-eksenine paralel olarak
ne kadar ve ne yönde gittiğimize bakarak
$\overrightarrow{i}$ nin katsayısını buluruz.

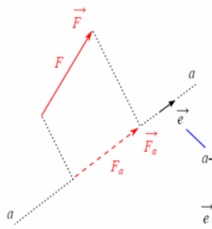
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\,\overrightarrow{k}$$

Bir kuvvetin herhangi bir doğrultuya dik izdüşümü skaler çarpım ile de bulunabilir.

Örnek olarak F kuvvetinin x-eksenine izdüşümünü bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} \bullet \vec{i} = F\,(1)\cos\theta_x \\ F_x = F\cos\theta_x \end{array}\right\} \quad F_x = \vec{F} \bullet \vec{i} \qquad \begin{array}{l} \vec{F}_x = F_x\,\vec{i} \\ \vec{F}_x = \vec{F} \bullet \vec{i}\;\vec{i} \end{array}$$

Benzer şekilde:



a-a doğrultusundaki birim vektör

$$\vec{e} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_a = F_a\,\vec{e} \\ \boxed{F_a = \vec{F} \bullet \vec{e}} \end{array}\right\} \quad \vec{F}_a = \vec{F} \bullet \vec{e}\;\vec{e}$$

$\vec{F} \perp \vec{e}$ ise:

$$F_a = 0$$

Bir kuvvetin herhangi bir doğrultuya dik izdüşümünün şiddeti, kuvvet ile doğrultu üzerindeki birim vektörün skaler çarpımı ile bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} F_a = \vec{F} \bullet \vec{e} \\ \vec{F} = F\,(l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k}) \\ \vec{e} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k} \end{array}\right\} \quad F_a = F\,(l\,\alpha + m\,\beta + n\,\gamma)$$

Herhangi iki vektör arasındaki açıyı bulmak için:

$$\vec{P}_1 = P_1\,(l_1\,\vec{i} + m_1\,\vec{j} + n_1\,\vec{k})$$

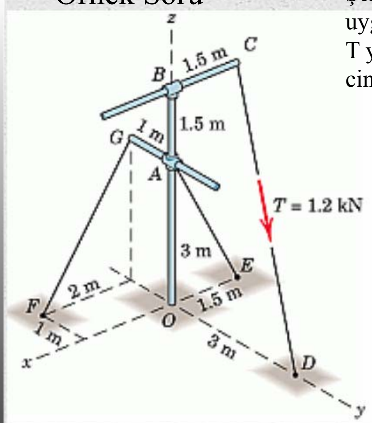
$$\vec{P}_2 = P_2\,(l_2\,\vec{i} + m_2\,\vec{j} + n_2\,\vec{k})$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{P}_1 \bullet \vec{P}_2}{P_1 P_2} = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

$$\theta = 90^\circ \quad \leftrightarrow \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Örnek Soru

Şekildeki CD kablosunun, direğin C noktasına uyguladığı 1.2 kN şiddetindeki çekme kuvveti T yi, x, y, z eksenlerindeki birim vektörler cinsinden yazınız.



$$\vec{T} = T\,\frac{\overrightarrow{CD}}{\overline{CD}}$$

$$\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C)\,\vec{i} + (y_D - y_C)\,\vec{j} + (z_D - z_C)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = [0 - (-1.5)]\,\vec{i} + (3 - 0)\,\vec{j} + (0 - 4.5)\,\vec{k} \text{ m}$$

$$\overrightarrow{CD} = 1.5\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 4.5\,\vec{k} \text{ m}$$

$$\overline{CD}^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2$$

$$\overline{CD}^2 = (1.5)^2 + 3^2 + (-4.5)^2 \text{ m}^2$$

$$\overline{CD} = 5.61 \text{ m}$$

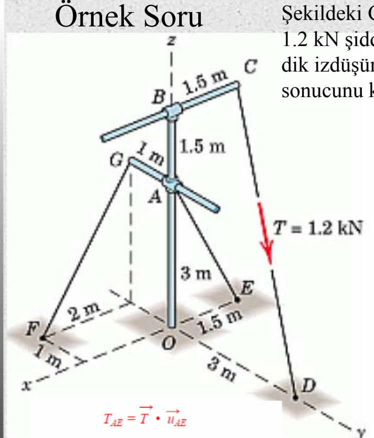
$$\vec{T} = 1.2\,\frac{1.5\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 4.5\,\vec{k}}{5.61} \text{ kN}$$

$$\vec{T} = 1.2\,\frac{1.5}{5.61}\,\vec{i} + 1.2\,\frac{3}{5.61}\,\vec{j} + 1.2\,\frac{-4.5}{5.61}\,\vec{k} \text{ kN}$$

$$\vec{T} = 0.32\,\vec{i} + 0.64\,\vec{j} - 0.96\,\vec{k} \text{ kN}$$

Örnek Soru

Şekildeki CD kablosunun, direğin C noktasına uyguladığı 1.2 kN şiddetindeki çekme kuvveti T nin, AE doğrultusuna dik izdüşümünün şiddetini bulunuz. Bir önceki problemin sonucunu kullanınız.



Çözüm

$$\vec{u}_{AE} = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overline{AE}}$$

$$\overrightarrow{AE} = (x_E - x_A)\,\vec{i} + (y_E - y_A)\,\vec{j} + (z_E - z_A)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AE} = (-1.5 - 0)\,\vec{i} + (0 - 0)\,\vec{j} + (0 - 3)\,\vec{k} \text{ m}$$

$$\overrightarrow{AE} = -1.5\,\vec{i} - 3\,\vec{k} \text{ m}$$

$$\overline{AE}^2 = (x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 + (z_E - z_A)^2$$

$$\overline{AE}^2 = (-1.5)^2 + 0^2 + (-3)^2 \text{ m}^2$$

$$\overline{AE} = 3.35 \text{ m}$$

$$\vec{u}_{AE} = -0.45\,\vec{i} - 0.9\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_{AE} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$$

$$\vec{T} = T_x\,\vec{i} + T_y\,\vec{j} + T_z\,\vec{k}$$

$$\vec{T} = 0.32\,\vec{i} + 0.64\,\vec{j} - 0.96\,\vec{k} \text{ kN}$$

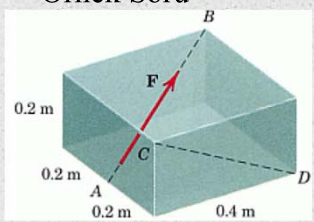
$$T_{AE} = \vec{T} \cdot \vec{u}_{AE}$$

$$T_{AE} = T_x\,\alpha + T_y\,\beta + T_z\,\gamma$$

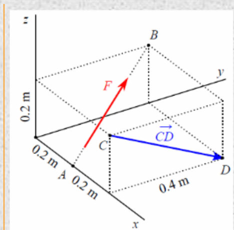
$$T_{AE} = 0.32(-0.45) + 0 + (-0.96)(-0.9) \text{ kN}$$

$$\boxed{T_{AE} = 0.72 \text{ kN}}$$

Örnek Soru



Şekildeki F kuvvetinin şiddeti 2 kN dur ve A dan B ye doğru yönelmiştir. F nin CD doğrultusuna dik izdüşümünü hesaplayınız ve F ile CD arasındaki açı θ yı bulunuz.



$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k} = F\,\frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}}$$

$$\vec{F} = -2\,\frac{0.2}{0.49}\,\vec{i} + 2\,\frac{0.4}{0.49}\,\vec{j} + 2\,\frac{0.2}{0.49}\,\vec{k}\ \text{kN}$$

$$\vec{F} = -0.82\,\vec{i} + 1.63\,\vec{j} + 0.82\,\vec{k}\ \text{kN}$$

$$\overrightarrow{AB} = -0.2\,\vec{i} + 0.4\,\vec{j} + 0.2\,\vec{k}\ \text{m}$$

$$\overline{AB}^2 = (-0.2)^2 + 0.4^2 + 0.2^2\ \text{m}^2$$

$$\overline{AB} = 0.49\ \text{m}$$

$$\overrightarrow{CD} = 0.4\,\vec{j} - 0.2\,\vec{k}\ \text{m}$$

$$\overline{CD}^2 = 0.4^2 + (-0.2)^2\ \text{m}^2$$

$$\overline{CD} = 0.447\ \text{m}$$

$$\vec{u}_{CD} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overline{CD}}$$

$$\vec{u}_{CD} = 0.894\,\vec{j} - 0.447\,\vec{k}$$

$$F_{CD} = \vec{F}\cdot\vec{u}_{CD}$$

$$F_{CD} = F_x\,\alpha + F_y\,\beta + F_z\,\gamma$$

$$F_{CD} = 1.63(0.894) + 0.82(-0.447)\ \text{kN}$$

$$F_{CD} = 1.09\ \text{kN}$$

$$F_{CD} = \vec{F}\cdot\vec{u}_{CD} = F\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{F_{CD}}{F}$$

$$\theta = 56.8^\circ$$

Moment

Moment, bir kuvvetin herhangi bir eksene göre döndürme etkisidir.

Bir kuvvetin kendi tesir çizgisi ile kesişen bir eksene göre momenti yoktur,

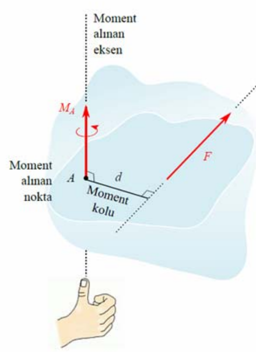
tesir çizgisine paralel olan bir eksene göre de momenti yoktur.

Moment vektörel bir büyüklüktür.

Moment vektörünü $\vec{M}$ ile göstereceğiz.

Moment vektörünün yönü sağ el kuralı ile bulunur.

Sağ elimizin dört parmağını kuvvet yönünde tutup avucumuzun içini moment alınan eksene döndürüp avucumuzu kapattığımız zaman baş parmağımız moment vektörünün yönünü gösterir.



Bir noktaya göre moment

Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti, kuvvet ile noktanın içinde bulunduğu düzleme dik olan ve moment alınan noktadan geçen bir eksene göre döndürme etkisidir.

Bir noktaya göre alınan momentin şiddeti: $\boxed{M_A = F\,d}$

İki boyutlu kuvvet sistemini oluşturan kuvvetlerin momentleri genellikle içinde bulundukları düzlemde yer alan bir noktaya göre alındığı için, moment vektörlerinin tamamı birbirine paraleldir. Dolayısı ile sadece şiddetleri ile ilgilenmek ve yönlerini de pozitif-negatif işaretle belirtmek yeterli olmaktadır.

Fakat üç boyutlu kuvvet sistemini oluşturan kuvvetlerin herhangi bir noktaya göre momentlerinin oluşturduğu sistem de üç boyutludur.
Yani moment vektörleri birbirine paralel değildir.

$$\vec{M}_A = \vec{M}_{Ax} + \vec{M}_{Ay} + \vec{M}_{Az}$$

$$\vec{M}_A = M_{Ax}\,\vec{i} + M_{Ay}\,\vec{j} + M_{Az}\,\vec{k}$$

Bir kuvvetin bir noktaya göre momentini vektörel çarpımla bulabiliriz.

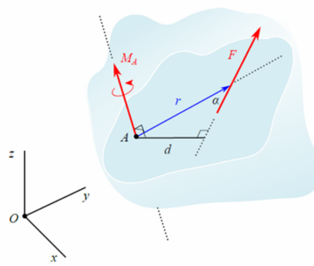
$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad M_A = r\,F\sin\alpha \qquad M_A = F\,d \qquad d = r\sin\alpha$$

$$M_A = F\,r\sin\alpha$$

r vektörü, moment alınan noktadan başlar,
kuvvetin tesir çizgisi üzerinde herhangi bir noktada biter.

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A \neq \vec{F} \times \vec{r}$$



Moment alınan noktadan geçen herhangi bir eksene göre moment

$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_{A\lambda}$: A dan geçen λ eksenine göre moment

$\vec{e} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$: λ ekseni üzerindeki birim vektör

$$\left.\begin{aligned} M_\lambda &= M_{A\lambda} = \vec{M}_A \cdot \vec{e} \\ \vec{M}_A &= \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{M_\lambda = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{e}}$$

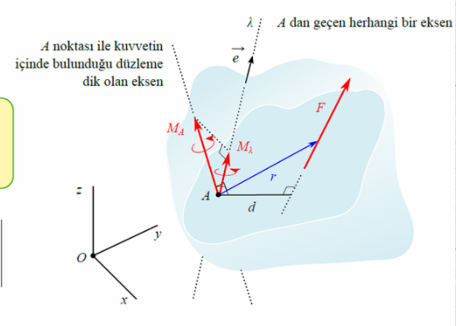
$$\vec{r} = r_x\,\vec{i} + r_y\,\vec{j} + r_z\,\vec{k}$$
$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$

$$M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = F\,(l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k})$$

$$M_\lambda = F \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ l & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_\lambda = M_\lambda\,\vec{e}$$



Moment alınan eksen, A noktasına göre alınan momente dik ise: $\vec{M}_A \perp \vec{e} \rightarrow M_\lambda = 0$

Bir kuvvetin, moment alınan nokta ile kuvvetin içinde bulunduğu düzlemde yer alan bir eksene göre momenti yoktur.

$$\vec{M}_A = \vec{M}_{Ax} + \vec{M}_{Ay} + \vec{M}_{Az}$$

$$\vec{M}_A = M_{Ax}\,\vec{i} + M_{Ay}\,\vec{j} + M_{Az}\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = M_{x'}\,\vec{i} + M_{y'}\,\vec{j} + M_{z'}\,\vec{k}$$

$\vec{M}_{Ax}$: *A* dan geçen ve *x*-eksenine paralel olan eksene göre moment

$\vec{M}_{Ay}$: *A* dan geçen ve *y*-eksenine paralel olan eksene göre moment

$\vec{M}_{Az}$: *A* dan geçen ve *z*-eksenine paralel olan eksene göre moment

$$\vec{M}_{Ax} = \vec{M}_{Ax'} = \vec{M}_{x'}$$

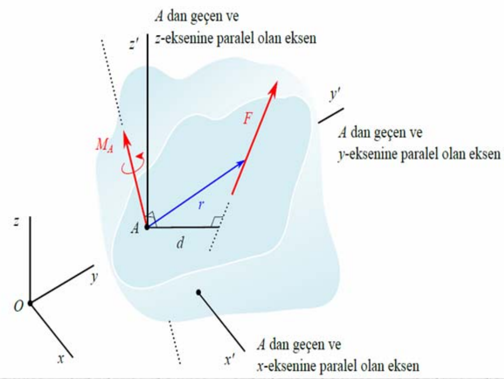
$$\vec{M}_{Ay} = \vec{M}_{Ay'} = \vec{M}_{y'}$$

$$\vec{M}_{Az} = \vec{M}_{Az'} = \vec{M}_{z'}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{Ox} + \vec{M}_{Oy} + \vec{M}_{Oz}$$

$$\vec{M}_O = M_{Ox}\,\vec{i} + M_{Oy}\,\vec{j} + M_{Oz}\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j} + M_z\,\vec{k}$$



Varignon Teoremi

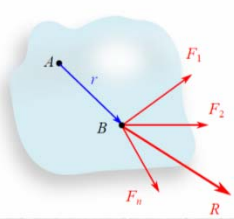
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_A^{\,R} = \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_A^{\,F1} = \vec{r} \times \vec{F}_1$$

$$\vdots$$

$$\vec{M}_A^{\,Fn} = \vec{r} \times \vec{F}_n$$



$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \cdots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

$$\boxed{\vec{M}_A^{\,R} = \vec{M}_A^{\,F1} + \cdots + \vec{M}_A^{\,Fn}}$$

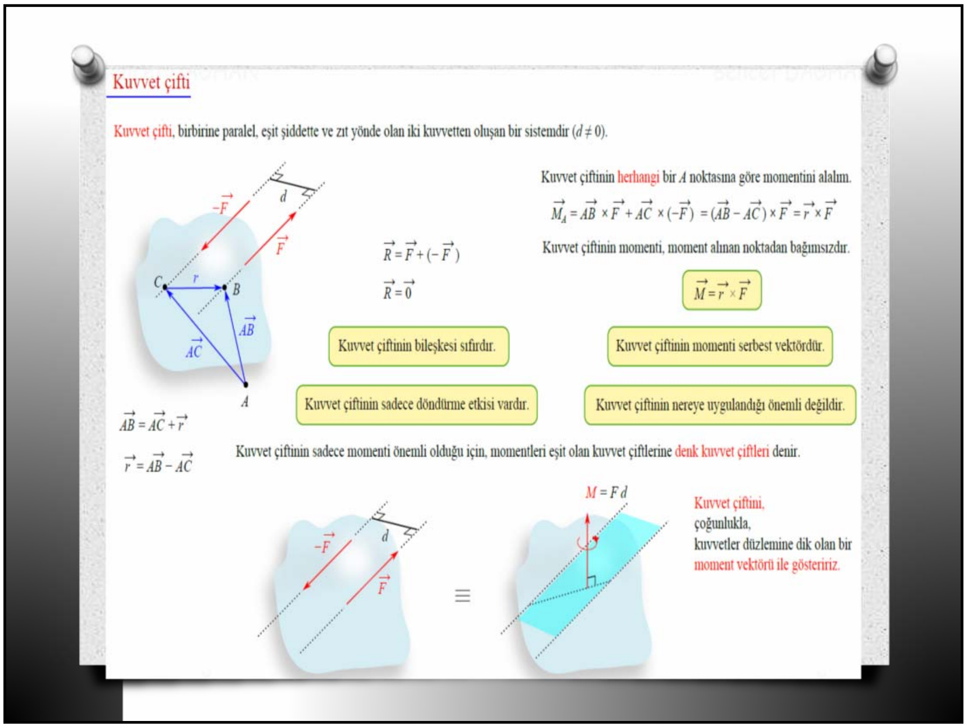
$$M_{Ax}^{\;R} = M_{Ax}^{\;F1} + \cdots + M_{Ax}^{\;Fn}$$

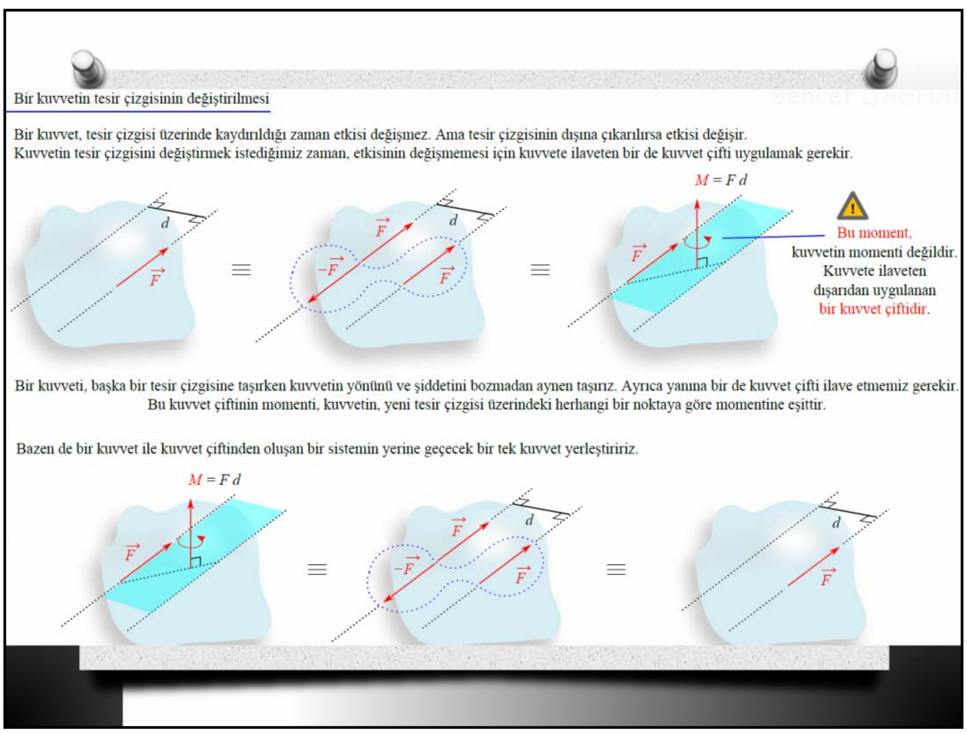
$$M_{Ay}^{\;R} = M_{Ay}^{\;F1} + \cdots + M_{Ay}^{\;Fn}$$

$$M_{Az}^{\;R} = M_{Az}^{\;F1} + \cdots + M_{Az}^{\;Fn}$$

Bir noktada kesişen kuvvetlerin bileşkesinin herhangi bir noktaya göre momenti, kuvvetlerin o noktaya göre momentleri toplamına eşittir.

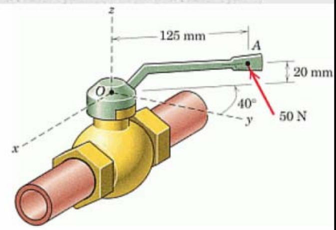
Bir noktada kesişen kuvvetlerin bileşkesinin herhangi bir eksene göre momenti, kuvvetlerin o eksene göre momentleri toplamına eşittir.


Kuvvet çifti
Kuvvet çifti, birbirine paralel, eşit şiddette ve zıt yönde olan iki kuvvetten oluşan bir sistemdir ($d \neq 0$).
Kuvvet çiftinin herhangi bir A noktasına göre momentini alalım.
$\vec{M}_A = \vec{AB} \times \vec{F} + \vec{AC} \times (-\vec{F}) = (\vec{AB} - \vec{AC}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$
Kuvvet çiftinin momenti, moment alınan noktadan bağımsızdır.
$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F})$
$\vec{R} = \vec{0}$
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Kuvvet çiftinin bileşkesi sıfırdır.
Kuvvet çiftinin momenti serbest vektördür.
Kuvvet çiftinin sadece döndürme etkisi vardır.
Kuvvet çiftinin nereye uygulandığı önemli değildir.
$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{r}$
$\vec{r} = \vec{AB} - \vec{AC}$
Kuvvet çiftinin sadece momenti önemli olduğu için, momentleri eşit olan kuvvet çiftlerine denk kuvvet çiftleri denir.
$M = F\,d$
Kuvvet çiftini,
çoğunlukla,
kuvvetler düzlemine dik olan bir
moment vektörü ile gösteririz.


Bir kuvvetin tesir çizgisinin değiştirilmesi
Bir kuvvet, tesir çizgisi üzerinde kaydırıldığı zaman etkisi değişmez. Ama tesir çizgisinin dışına çıkarılırsa etkisi değişir.
Kuvvetin tesir çizgisini değiştirmek istediğimiz zaman, etkisinin değişmemesi için kuvvete ilaveten bir de kuvvet çifti uygulamak gerekir.
$M = F\,d$
Bu moment,
kuvvetin momenti değildir.
Kuvvete ilaveten
dışarıdan uygulanan
bir kuvvet çiftidir.
Bir kuvveti, başka bir tesir çizgisine taşırken kuvvetin yönünü ve şiddetini bozmadan aynen taşırız. Ayrıca yanına bir de kuvvet çifti ilave etmemiz gerekir.
Bu kuvvet çiftinin momenti, kuvvetin, yeni tesir çizgisi üzerindeki herhangi bir noktaya göre momentine eşittir.
Bazen de bir kuvvet ile kuvvet çiftinden oluşan bir sistemin yerine geçecek bir tek kuvvet yerleştiririz.
$M = F\,d$

Örnek Problem

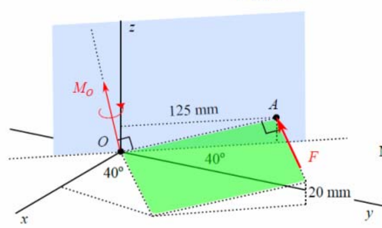
50 N-luk bir kuvvet, endüstriyel bir su vanasının koluna şekildeki gibi uygulanmıştır. Kuvvet yataydır ve *OA* koluna diktir. Kuvvetin, *O* noktasına göre momentini kartezyen koordinatlardaki birim vektörler cinsinden yazınız.

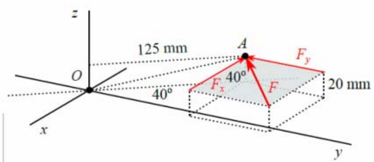


1. *Çözüm*

Verilenler:

$F = 50$ N





Momentin yönünü belirten işaretleri biz yerleştiririz.

Momentin yönünü bozmaması için F_x ve F_y nin işaretini atarız.

$$M_x = |F_y|\,(20) = 50 \sin 40°\,(20) = 643 \text{ N·mm}$$

$$M_y = -\,|F_x|\,(20) = -\,50 \cos 40°\,(20) = -\,766 \text{ N·mm}$$

$$M_z = F\,(125) = 50\,(125) = 6250 \text{ N·mm}$$

$$\vec{M_O} = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j} + M_z\,\vec{k}$$

$$\vec{M_O} = 643\,\vec{i} - 766\,\vec{j} + 6250\,\vec{k} \text{ N·mm}$$

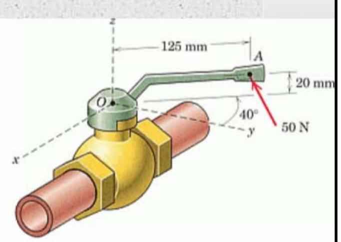
İstenenler:

$$\vec{M_O} = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j} + M_z\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} = -\,50 \cos 40°\,\vec{i} - 50 \sin 40°\,\vec{j}$$

Örnek Problem

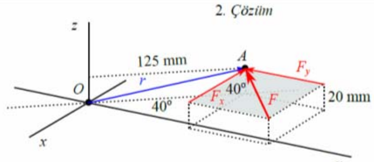
50 N-luk bir kuvvet, endüstriyel bir su vanasının koluna şekildeki gibi uygulanmıştır. Kuvvet yataydır ve *OA* koluna diktir. Kuvvetin, *O* noktasına göre momentini kartezyen koordinatlardaki birim vektörler cinsinden yazınız.



2. *Çözüm*

Verilenler:

$F = 50$ N



$$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{r} = r_x\,\vec{i} + r_y\,\vec{j} + r_z\,\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{OA}$$

$$\vec{r} = -\,125 \sin 40°\,\vec{i} + 125 \cos 40°\,\vec{j} + 20\,\vec{k} \quad \text{mm}$$

$$\vec{M_O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\,125 \sin 40° & 125 \cos 40° & 20 \\ -\,50 \cos 40° & -\,50 \sin 40° & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_O} = 643\,\vec{i} - 766\,\vec{j} + 6250\,\vec{k} \text{ N·mm}$$

Vektörel çarpım ile moment hesaplarken momentin yönünü belirten işaretler kendiliğinden gelir.

İstenenler:

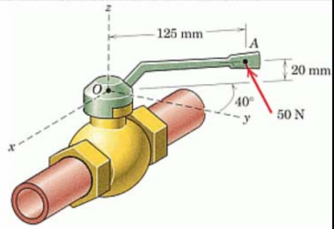
$$\vec{M_O} = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j} + M_z\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = -\,50 \cos 40°\,\vec{i} - 50 \sin 40°\,\vec{j} \text{ N}$$

Örnek Problem

50 N-luk bir kuvvet, endüstriyel bir su vanasının koluna şekildeki gibi uygulanmıştır. Kuvvet yataydır ve OA koluna diktir. Kuvvetin, O noktasına göre momentini kartezyen koordinatlardaki birim vektörler cinsinden yazınız.

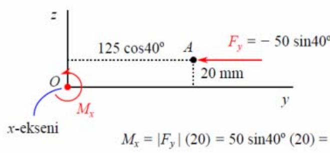


3. Çözüm

Verilenler:

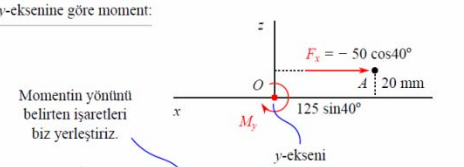
$F = 50$ N

x-eksenine göre moment:



$$M_x = |F_y|\,(20) = 50 \sin 40°\,(20) = 643 \ \text{N·mm}$$

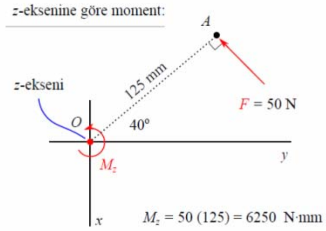
y-eksenine göre moment:



$$M_y = -\,|F_x|\,(20) = -50 \cos 40°\,(20) = -766 \ \text{N·mm}$$

Momentin yönünü bozmaması için

z-eksenine göre moment:



$$M_z = 50\,(125) = 6250 \ \text{N·mm}$$

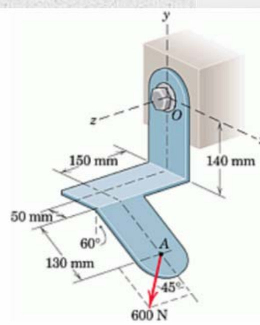
İstenenler:

$$\vec{M_O} = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j} + M_z\,\vec{k}$$

$$\vec{M_O} = 643\,\vec{i} - 766\,\vec{j} + 6250\,\vec{k} \ \text{N·mm}$$

Örnek Problem

Şekildeki 600 N-luk kuvveti, O noktasından geçen bir tesir çizgisine taşıyınız.

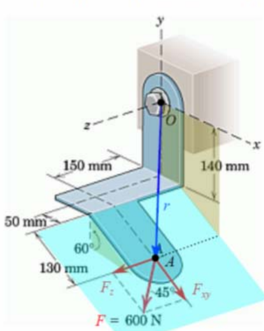


Çözüm

Verilenler:

$F = 600$ N

Bir kuvveti, başka bir tesir çizgisine taşırken, kuvvetin yönünü ve şiddetini bozmadan aynen taşırız. Ayrıca yanına bir de kuvvet çifti ilave ederiz. Bu kuvvet çiftinin momenti, kuvvetin, yeni tesir çizgisi üzerindeki herhangi bir noktaya göre momentine eşittir.



$$\vec{F} = \vec{F}_{xy} + \vec{F}_z = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$F_{xy} = F \cos 45°$$

$$F_x = F_{xy} \sin 60° = F \cos 45° \sin 60°$$

$$F_y = -\,F_{xy} \cos 60° = -\,F \cos 45° \cos 60°$$

$$F_z = F \sin 45°$$

$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = 367\,\vec{i} - 212\,\vec{j} + 424\,\vec{k} \ \text{N}$$

$$\vec{r} = r_x\,\vec{i} + r_y\,\vec{j} + r_z\,\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{OA} = (50 + 130 \sin 60°)\,\vec{i} - (140 + 130 \cos 60°)\,\vec{j} + 150\,\vec{k} \ \text{mm}$$

$$\vec{r} = 162.6\,\vec{i} - 205\,\vec{j} + 150\,\vec{k} \ \text{mm}$$

İstenenler:

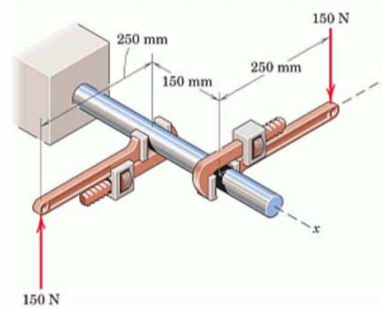
$M_O = ?$

$$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad \vec{M_O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 162.6 & -205 & 150 \\ 367 & -212 & 424 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_O} = -\,55.2\,\vec{i} - 13.9\,\vec{j} + 40.8\,\vec{k} \ \text{N·m}$$

Örnek Problem

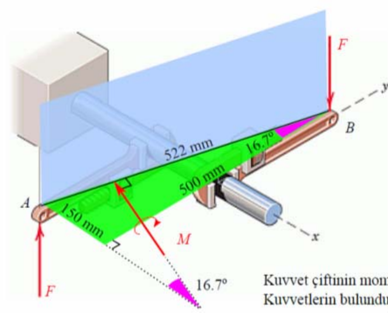
150 N-luk iki kuvvetten oluşan şekildeki kuvvet çiftinin momentini birim vektörler cinsinden yazınız.



Çözüm

Verilenler:

$F = 150$ N



Kuvvet çiftinin momenti, moment alınan noktadan bağımsızdır. Yani serbest vektördür. Kuvvetlerin bulunduğu düzleme diktir ve yönü sağ el kuralı ile bulunur.

İstenenler:

$M = ?$

$M = F\,d$ $\qquad d^2 = 150^2 + 500^2$

$M = 150\ (522)$ N·mm

$M = 78.3$ N·m

$\vec{M} = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j}$

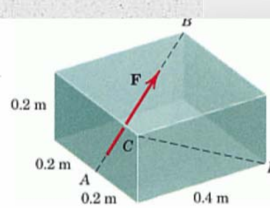
$M_x = -\,M \cos 16.7°$

$M_y = M \sin 16.7°$

$\boxed{\vec{M} = -\,75\ \vec{i} + 22.5\ \vec{j}\ \text{N·m}}$

Örnek Problem

Şekildeki F kuvvetinin CD çizgisine göre momentinin şiddeti 50 N·m ise F nin şiddetini bulunuz.



Çözüm

Verilenler:

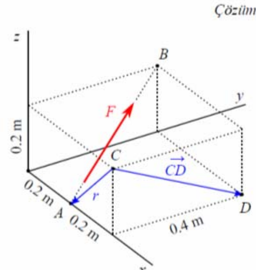
$M_\lambda = 50$ N·m

$A\ (0.2,0,0)$

$B\ (0,0.4,0.2)$

$C\ (0.4,0,0.2)$

$D\ (0.4,0.4,0)$



$\vec{AB} = -\,0.2\ \vec{i} + 0.4\ \vec{j} + 0.2\ \vec{k}$ m

$\overline{AB}^2 = (-0.2)^2 + 0.4^2 + 0.2^2$ m^2

$\overline{AB} = 0.49$ m

$\vec{CD} = 0.4\ \vec{j} - 0.2\ \vec{k}$ m

$\overline{CD}^2 = 0.4^2 + (-0.2)^2$ m^2

$\overline{CD} = 0.447$ m

$$M_\lambda = F \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ l & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$\vec{F} = F\,(l\ \vec{i} + m\ \vec{j} + n\ \vec{k}) = F\,\dfrac{\vec{AB}}{\overline{AB}}$

$\vec{r} = r_x\ \vec{i} + r_y\ \vec{j} + r_z\ \vec{k}$

$\vec{r} = \vec{CA}$

$\vec{r} = -\,0.2\ \vec{i} - 0.2\ \vec{k}$ m

$\vec{F} = F\,(-\,0.41\ \vec{i} + 0.82\ \vec{j} + 0.41\ \vec{k})$

$$M_\lambda = F \begin{vmatrix} -\,0.2 & 0 & -\,0.2 \\ -\,0.41 & 0.82 & 0.41 \\ 0 & 0.894 & -\,0.447 \end{vmatrix} = 50$$

İstenenler:

$F = ?$

$\vec{u}_{CD} = \alpha\ \vec{i} + \beta\ \vec{j} + \gamma\ \vec{k} = \dfrac{\vec{CD}}{\overline{CD}}$

$\vec{u}_{CD} = 0.894\ \vec{j} - 0.447\ \vec{k}$

$\boxed{F = 228\ \text{N}}$

Bir kuvvet sisteminin bileşkeleri

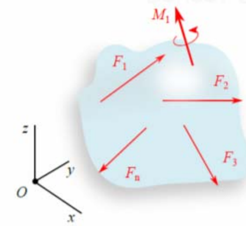
Bazen göz önüne alınan kuvvet sisteminin yerine geçecek bir tek kuvvet aranır.

Bu bileşke kuvvetin yönü, şiddeti ve tesir çizgisinin nereden geçtiği bulunmalıdır.

Üç boyutlu kuvvet sistemleri her zaman bir tek kuvvete indirgenemeyebilir.

Onun yerine, çoğunlukla, kuvvetleri keyfi olarak seçilen bir noktaya indirgemek ile yetinilir.

Kuvvet sistemini herhangi bir noktaya indirgediğimiz zaman sistem, çoğunlukla, bir kuvvet ve bir kuvvet çiftinden meydana gelen bir sisteme dönüşür.



Bileşke kuvvet

$$\vec{R} = R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j} + R_z\,\vec{k} = R\,(l_R\,\vec{i} + m_R\,\vec{j} + n_R\,\vec{k})$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = (F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} + F_{1z}\,\vec{k}) + (F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} + F_{2z}\,\vec{k}) + \cdots + (F_{nx}\,\vec{i} + F_{ny}\,\vec{j} + F_{nz}\,\vec{k}) = \Sigma\vec{F}$$

$$\vec{R} = \underbrace{(F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx})}_{=\Sigma F_x}\,\vec{i} + \underbrace{(F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny})}_{=\Sigma F_y}\,\vec{j} + \underbrace{(F_{1z} + F_{2z} + \cdots + F_{nz})}_{=\Sigma F_z}\,\vec{k}$$

Bileşke kuvvet çifti

$$\vec{M} = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j} + M_z\,\vec{k} = M\,(l_M\,\vec{i} + m_M\,\vec{j} + n_M\,\vec{k}) = \Sigma\vec{M}$$

Bileşke kuvvetin yönünü ve şiddetini bulmak için:

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \qquad R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

$$R_x = R\,l_R \qquad R_y = R\,m_R \qquad R_z = R\,n_R$$

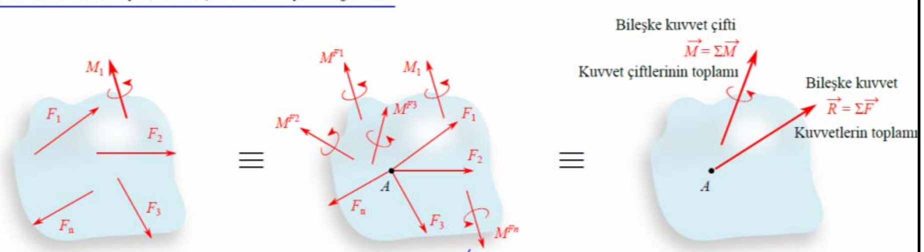
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Benzer şekilde bileşke kuvvet çiftinin yönünü ve şiddetini bulmak için:

$$M_x = \Sigma M_x \qquad M_y = \Sigma M_y \qquad M_z = \Sigma M_z \qquad M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$$

$$M_x = M\,l_M \qquad M_y = M\,m_M \qquad M_z = M\,n_M$$

Bir kuvvet sisteminin keyfi olarak seçilen bir noktaya indirgenmesi



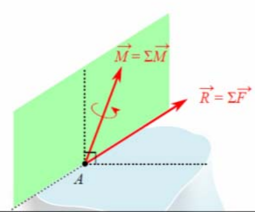
$M^{Fn} = M_A^{Fn}$

F_n kuvvetini A noktasına taşırken sisteme ilave edilmesi gereken kuvvet çifti

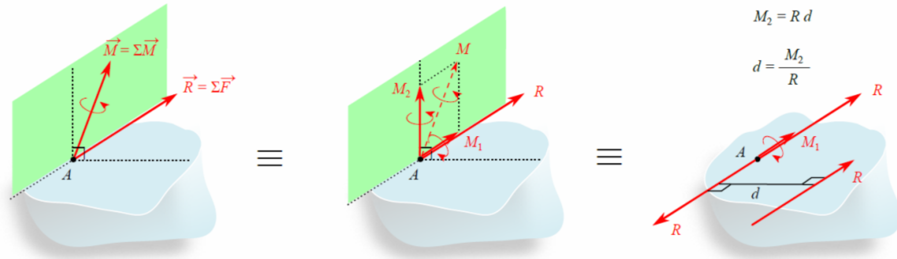
Bir kuvvet sistemini herhangi bir noktaya indirgemek istediğimiz zaman bütün kuvvetleri o noktaya taşırız.

Kuvvetleri taşırken sisteme ilave etmemiz gereken kuvvet çiftlerini de ilave ederiz.

Bu kuvvet çiftlerinin momentleri, kuvvetlerin o noktaya göre momentleri kadardır.



Bir noktaya indirgenmiş bir sistemin bir kuvvet vidasına veya bir tek kuvvete indirgenmesi



Birbirine paralel olan bir kuvvet ve bir kuvvet çiftinden oluşan sisteme kuvvet vidası denir.

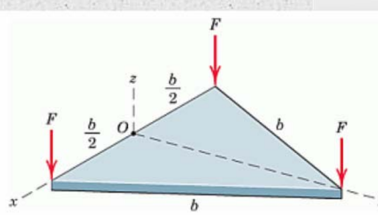
Yönleri aynı ise pozitif kuvvet vidası, zıt ise negatif kuvvet vidası denir.

Üç boyutlu bir kuvvet sisteminin bir tek kuvvete indirgenebilmesi için $M_1 = 0$ olması gerekir. Yani $\Sigma\vec{M} \perp \vec{R}$ olmalıdır.

$$\Sigma\vec{M} \cdot \vec{R} = 0$$
$$\updownarrow$$
$$\Sigma\vec{M} \perp \vec{R}$$

Örnek Problem

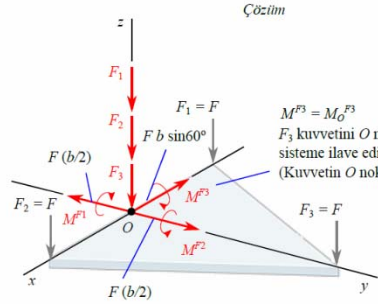
Üç tane eşit kuvvet eşkenar üçgen bir levhaya şekildeki gibi uygulanmıştır. Bu kuvvet sistemini O noktasına indirgeyiniz. R nin M ye dik olduğunu gösteriniz.



Verilenler:

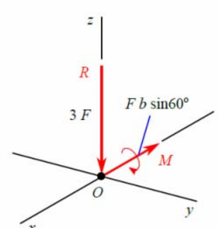
$F_1 = F$
$F_2 = F$
$F_3 = F$
b

Çözüm



$M^{F3} = M_O^{F3}$
F_3 kuvvetini O noktasına taşırken sisteme ilave edilmesi gereken kuvvet çifti (Kuvvetin O noktasına göre momentine eşittir.)

≡



İstenenler:

$R = ?$
$M = ?$

$\vec{R} = \Sigma\vec{F}$

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$\vec{R} = -\,3\,F\,\vec{k}$

$\vec{M} = \Sigma\vec{M}$

$\vec{M} = \vec{M}^{F1} + \vec{M}^{F2} + \vec{M}^{F3}$

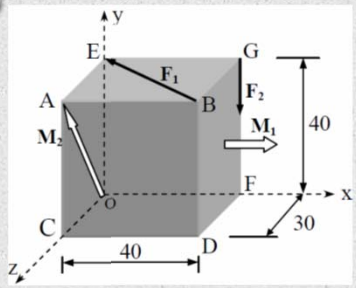
$\vec{M} = -\,F\,b\,\sin 60°\,\vec{i}$

$\vec{R} \cdot \vec{M} = 0$ ise: $\vec{R} \perp \vec{M}$

$(-3\,F)\,(-F\,b\,\sin 60°)\;\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

$\vec{R} \perp \vec{M}$

ÖRNEK SORU



B(40,40,30) ; E(0,40,0) ; G(40,40,0)
F(40,0,0) ; O(0,0,0) ; A(0,40,30)

Verilen kuvvetleri ve kuvvet çiftlerini O'ya indirgeyiniz. (Birimler cm'dir.)

F_1= 2 kN
F_2= 3 kN
M_1= 5 kNcm
M_2= 10 kNcm

$$\overrightarrow{BE} = -40\vec{i} - 30\vec{k}$$
$$\overrightarrow{GF} = -40\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OA} = 40\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$\vec{F_1} = 2000.\left(\frac{-40i - 30k}{\sqrt{40^2 + 30^2}}\right) = -1600i - 1200k$$

$$\vec{F_2} = 3000.\left(\frac{-40j}{40}\right) = -3000j$$

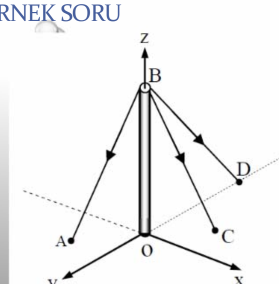
$$\vec{M_1} = 5000i$$
$$\vec{M_2} = 10000.\left(\frac{40j + 30k}{\sqrt{40^2 + 30^2}}\right) = 8000j + 6000k$$

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

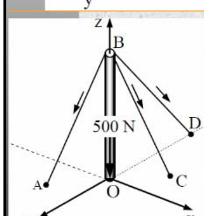
$$= 5000i + 8000j + 6000k + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 40 & 30 \\ -1600 & 0 & -1200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 40 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_0 = -43000i + 8000j - 50000k \quad \text{Ncm}$$

ÖRNEK SORU



A(-3, 2, 0), B(0, 0, 6), C(2, -3, 0), D(0, -3, 0)
Ağırlığı 500 N olan OB çubuğu yukarıda koordinatları verilen üç tel halatla A, C, D noktalarına sabitlenmiştir. Sistemin dengede kalabilmesi için halat germe kuvvetlerinin minimum ne olması gerektiğini hesaplayınız.



$$\overrightarrow{BD} = 0 - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$\overrightarrow{BA} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{F_{BD}} = F_{BD}\cdot\left(\frac{-3\vec{j}}{3\sqrt{5}} - \frac{6\vec{k}}{3\sqrt{5}}\right) \quad \overrightarrow{F_{BC}} = F_{BC}\cdot\left(\frac{2\vec{i}}{7} - \frac{3\vec{j}}{7} - \frac{6\vec{k}}{7}\right) \quad \overrightarrow{F_{BA}} = F_{BA}\cdot\left(-\frac{3\vec{i}}{7} + \frac{2\vec{j}}{7} - \frac{6\vec{k}}{7}\right)$$

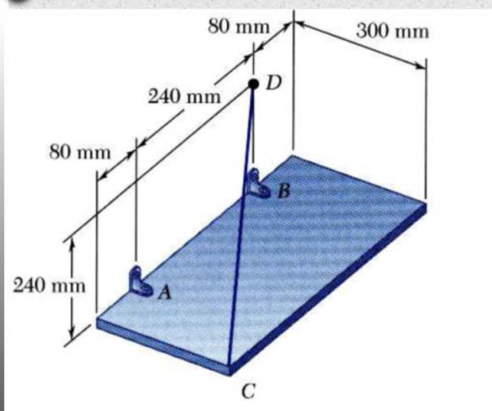
$$\sum F_x = 0$$
$$\frac{2}{7}F_{BC} - \frac{3}{7}F_{BA} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{F_{BC} = 1{,}5F_{BA}}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$-\frac{3}{3\sqrt{5}}F_{BD} - \frac{3}{7}F_{BC} + \frac{2}{7}F_{BA} = 0$$
$$-0{,}447F_{BD} - 0{,}428F_{BC} + 0{,}286F_{BA} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{F_{BD} = -0{,}796F_{BA}}$$

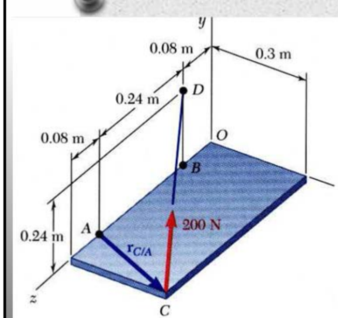
$$\sum F_z = 0$$
$$-\frac{6}{3\sqrt{5}}F_{BD} - \frac{6}{7}F_{BC} - \frac{6}{7}F_{BA} - 500 = 0$$
$$-1{,}431F_{BA} = 500$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{BA} = -350\,N}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{Bc} = -525\,N}}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{BD} = 278{,}6\,N}}$$

SORU



Yukarda görülen dikdörtgen levha A ve B de menteşelerle ve CD ipi ile bağlanmıştır. CD ipindeki kuvvetin şiddetinin 200 N olduğu bilindiğine göre bu kuvvetin *A* noktasına göre momentini bulunuz.



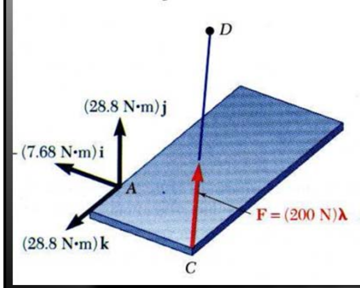
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0.3\ \mathbf{m})\vec{i} + (0.08\ \mathbf{m})\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = (200\ \mathrm{N})\frac{\vec{r}_{C/D}}{r_{C/D}}$$

$$= (200\ \mathrm{N})\frac{-(0.3\ \mathrm{m})\vec{i} + (0.24\ \mathrm{m})\vec{j} - (0.32\ \mathrm{m})\vec{k}}{0.5\ \mathrm{m}}$$

$$= -(120\ \mathrm{N})\vec{i} + (96\ \mathrm{N})\vec{j} - (128\ \mathrm{N})\vec{k}$$



$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{M}_A = -(7.68\ N \cdot m)\vec{i} + (28.8\ N \cdot m)\vec{j} + (28.8\ N \cdot m)\vec{k}}$$