HİPERSTATİK SİSTEMLER

Tanım: Bütün kesit zorları, şekildeğiştirmeleri ve yerdeğiştirmelerinin belirlenmesi için denge denklemlerinin yeterli olmadığı sistemlere ***hiperstatik sistemler*** denir.

Hiperstatik sistemlerin hesabı için,

a) Denge denklemlerine,

b) Kesit tesiri-şekildeğiştirme bağıntılarına

$$\frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{\varepsilon \ \Delta t}{d}$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \varepsilon \ t$$

$$\frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'}$$

c) Geometrik uygunluk şartlarına (süreklilik denklemleri)

ihtiyaç vardır.

Dış etkiler: Bir hiperstatik sistemde kesit zoru, şekildeğiştirme ve yerdeğiştirme meydana getiren dış etkiler şunlardır;

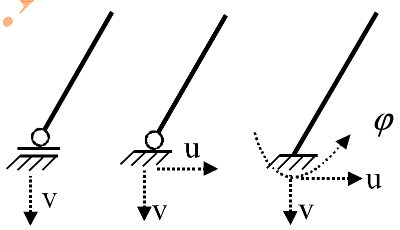
a) Dış Yükler

b) Sıcaklık değişmesi

- Uniform sıcaklık değişmesi (t)
- Farklı sıcaklık değişmesi (Δt)

c) Mesnet Çökmeleri

Tanım: Mesnetlerde meydana gelen ve mesnedin tanımına uymayan yerdeğiştirmelerdir.



u,v : Doğrulsal (lineer) mesnet çökmeleri,
φ : Açısal mesnet çökmesi

d) Rötre (-ısı)

e) İlkel kusurlar

f) Ön germe kuvvetleri

İzostatik sistemlerde sıcaklık değişmesi, rötre, ilkel kusurlar ve mesnet çökmelerinden dolayı kesit zoru meydana gelmediği halde hiperstatik sistemlerde bu etkilerden dolayı kesit zorları meydana gelir.

Hiperstatik sistemlerde hesap yöntemleri

1. Kuvvet Yöntemi (sürekli kirişlerde Clapeyron Denklemleri)
2. Deplasman yöntemleri :
   - Açı Yöntemi
   - Cross Yöntemi
   - Kani Yöntemi
   - Sabit Noktalar Yöntemi
3. Başlangıç değerleri yöntemi (Travers Yöntemi)

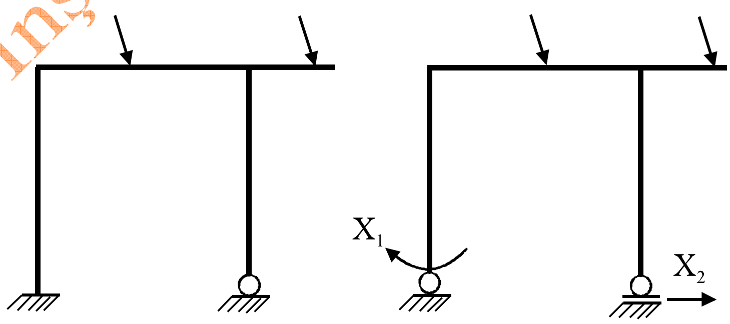
KUVVET YÖNTEMİ

Tanımlar

İzostatik esas sistem: Bir hiperstatik sistemde kesimler yapılarak bazı kesit zorları ve/veya mesnet tepkilerinin kaldırılması ile elde edilen taşıyıcı izostatik sisteme denir. Bir hiperstatik sistemden çok sayıda izostatik sistem elde edilebilir.

Hiperstatik bilinmeyen, hiperstatiklik derecesi: Hiperstatik sistemde yapılan kesimlerle kaldırılan kesit zorları ve/veya mesnet tepkilerine Hiperstatik Bilinmeyen, bunların sayısına ise hiperstatiklik derecesi denir. Hiperstatiklik derecesi, bir hiperstatik sistemin hesaplanabilmesi için denge denklemlerine ilave edilmesi gereken denklem sayısını vermektedir.

Uygulama:



Hiperstatik Sistem

İzostatik Esas Sistem
Hiperstatiklik Derecesi : 2
Hiperstatik Bilinmiyenler: $X_{1,}$ X_2

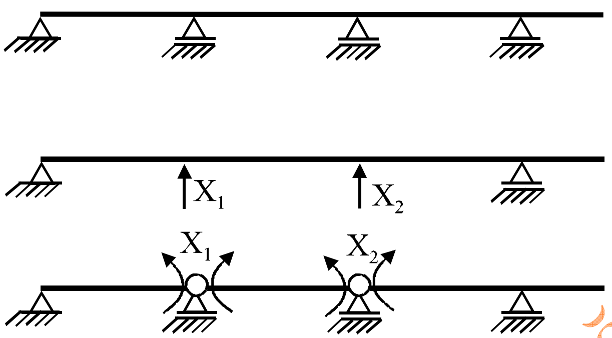
Hiperstatik sistemlerin hiperstatik bilinmeyenlerin tipine göre sınıflandırılması

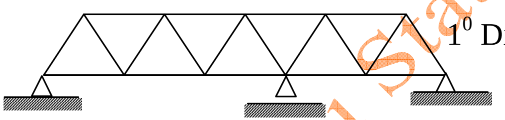
- **Dıştan hiperstatik sistem;**

Bir hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için yalnız mesnet tepkilerinin kaldırılması yeterli oluyorsa böyle sisteme ***dıştan hiperstatik sistem*** denir.

Dıştan hiperstatik sistemleri izostatik hale getirmek için mesnet tepkisi ve/veya kesit zoru kaldırılabilir. Kesit zoru kaldırılması halinde hiperstatik bilinmeyen zıt yönlü çift moment ve/veya çift kuvvettir.

2^0 dıştan hiperstatik





1^0 Dıştan Hiperstatik

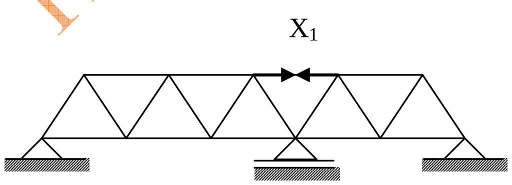
r ; mesnet tepkisi sayısı ,

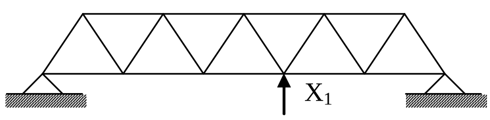
ç; çubuk sayısı

d; düğüm noktası sayısı

olmak üzere hiperstatiklik derecesi; $n = \underbrace{r + ç}_{bilinmeyenler} - \underbrace{2d}_{denge\ denklemleri}$

r=4, ç=11, d=7 *n=4+11-2*7=1* (dıştan hiperstatik)

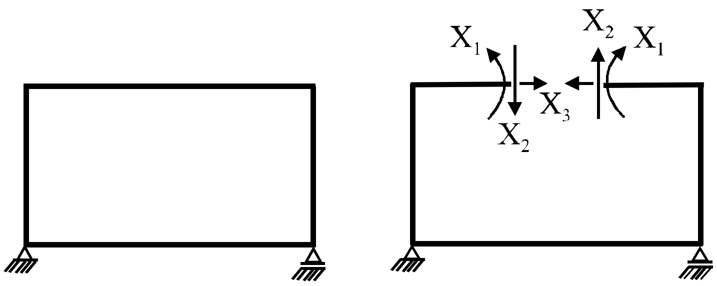




İzostatik esas sistem İzostatik esas sistem

- **İçten hiperstatik sistem**

Bir hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için mutlaka kesit zoru kaldırmak gerekiyorsa böyle sisteme ***içten hiperstatik sistem*** denir.

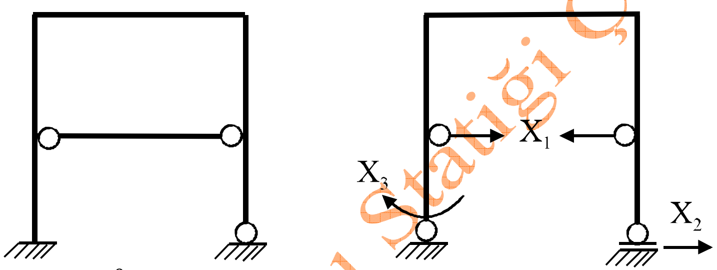


İçten hiperstatik sistem   İzostatik esas sistem

- **İçten ve dıştan hiperstatik sistem**

Bir hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için hem kesit zoru hem de mesnet tepkisi kaldırmak gerekiyorsa böyle sisteme ***içten ve dıştan hiperstatik sistem*** denir.

Bu tür sistemlerde en az içten hiperstatiklik derecesi kadar kesit zoru kaldırılmalıdır.



2^0 Dıştan
1^0 İçten Hip. Sis.   izostatik esas sistem

Kuvvet Yönteminin dayandığı iki önemli kavram söz konusudur.

- **Süperpozisyon Prensibi**

Hiperstatik sistemde dış etkilerden meydana gelen kesit zorları, şekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmeler; İzostatik esas sistemde

a)dış etkilerden

b) hiperstatik bilinmeyenlerden

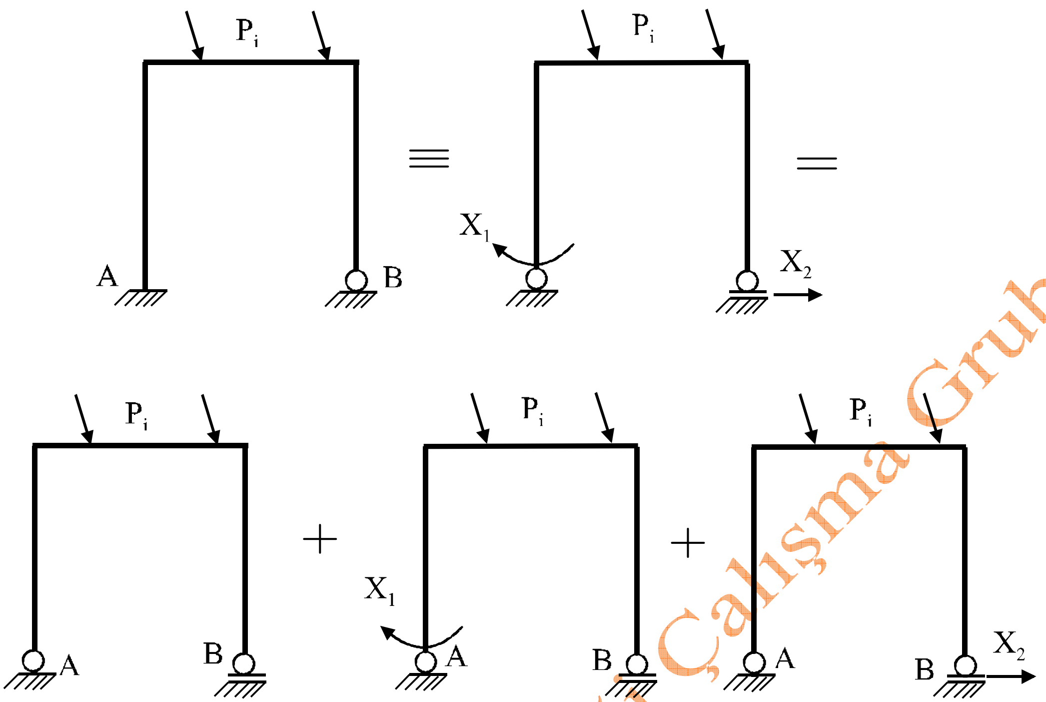
oluşan kesit zorları, sekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmelerin toplamına eşittir.

- **Süreklilik Denklemleri**

Hiperstatik bilinmeyenler, sistemin kesim yapılan noktalarındaki geometrik uygunluk şartlarını ifade eden denklemlerden yararlanarak belirlenir..

Uygulama:

1- Süperpozisyon kuralı:



Dış yükler $\qquad$ X_1 Yüklemesi $\qquad$ X_2 Yüklemesi

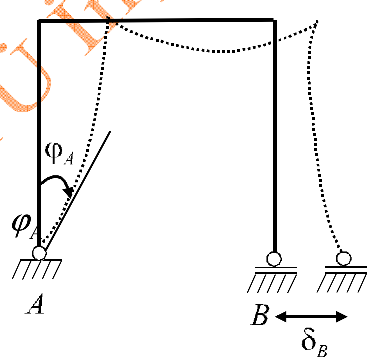
2-Geometrik uygunluk koşulları:

Verilen hiperstatik sistemin mesnetlerindeki geometrik uygunluk şartları :

A mesnedindeki dönme sıfırdır. $\varphi_A=0$,

B mesnedindeki yatay yerdeğiştirme sıfırdır. $\delta_B=0$

Hiperstatik sistemin hesaplanabilmesi için X_1, X_2 hiperstatik bilinmeyenlerinin belirlenmesi gereklidir. Bu bilinmeyenlerin hesaplanması için A ve B mesnetlerinde yukarıda ifade edilen ($\varphi_A=0$, $\delta_B=0$) geometrik uygunluk şartlarından yararlanılır.



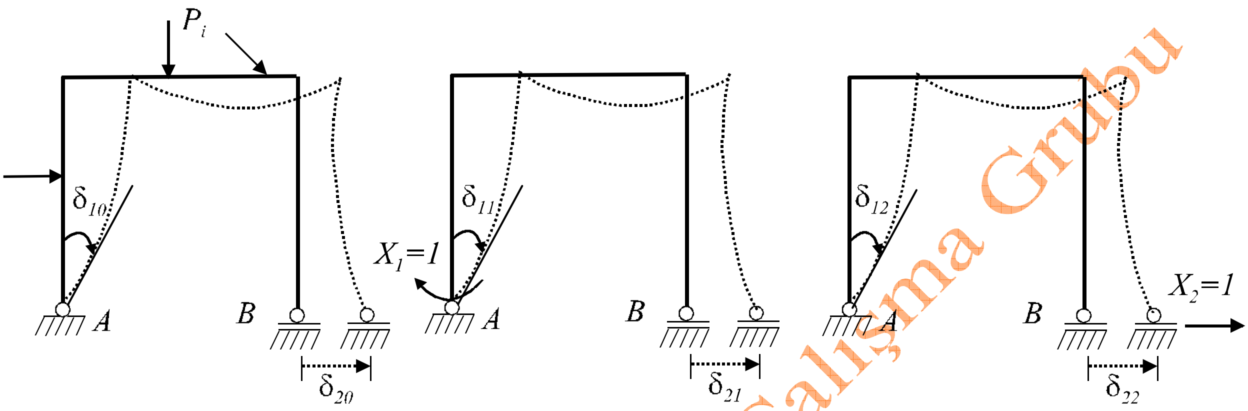
A mesnedindeki dönme $\qquad \varphi_A$

B mesnedindeki yatay hareket $\qquad \delta_{BX}$

Hiperstatik sistemin yerdeğiştirmeleri ; δ_{ij}

Yer Neden

		X=0 Durumu	X_1=1 Durumu	X_2=1 Durumu
Kesit Zorları	:	M_0, N_0, T_0	M_1, N_1, T_1	M_2, N_2, T_2
Yerdeğiştirmeler	:	δ_{10}, δ_{20}	δ_{11}, δ_{21}	δ_{12}, δ_{22}



Dış yük durumu *(X=0 durumu)* *X_1=1 Durumu* *X_2=1 Durumu*

Hiperstatik sistemin mesnetlerindeki geometrik uygunluk şartları (Süreklilik denklemleri) : φ_A=0 , δ_B=0 dır. Bu denklemler izostatik esas sistemdeki yerdeğiştirmeler (δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22}) ve hiperstatik bilinmeyenler (X_1 , X_2) cinsinden süperpozisyon prensibi kullanılarak yazılabilir.

Süreklilik Denklemleri :

$$\varphi_A = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{BX} = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

İzostatik esas sitemdeki δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} yerdeğiştirmeleri Virtüel İş Teoremi ile hesaplanarak yukarıda verilen denklem takımı çözülür ve X_1 , X_2 hiperstatik bilinmeyenleri bulunur. Bu bilinmeyenler hesaplandıktan sonra süperpozisyon denklemleri kullanılarak hiperstatik sistemin M, N, T kesit zorları elde edilir.

Süperpozisyon Prensibi

Hiperstatik sistemin

M, N, T Kesit Zorları

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$
$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2$$
$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2$$

Birim yüklemeler

X=0 Yüklemesi :

İzostatik esas sisteme (i.e.s) yalnız dış yükler etkitilir. Bu durumda meydana gelen kesit zorları M_0, N_0, T_0 ile gösterilir.

X_i=1 Yüklemesi :

İzostatik esas sisteme yalnız X_i hiperstatik bilinmeyeninin birim değeri etkitilir. Bu durumda meydana gelen kesit zorları M_i, N_i, T_i ile gösterilir. Bir hiperstatik sistemin hesabında hiperstatiklik derecesi kadar (i=1,2,3,........,n) birim yükleme yapılır.

Genel Süperpozisyon Denklemleri

Hiperstatik sistemde dış etkilerden meydana gelen büyüklükler (kesit zorları, mesnet tepkileri, yerdeğiştirmeler v.s.) ***İzostatik esas sistemde dış etkilerden ve hiperstatik bilinmeyenlerden meydana gelen büyüklüklerin toplamına eşittir.***

Xi (i=1,2,3,..n)	Hiperstatik bilinmeyenler
M_0, N_0, T_0, R_0	X=0 yüklemesinden meydana gelen kesit zorları ve meset tepkileri
M_i, N_i, T_i, R_i	X_i=1 yüklemesinden meydana gelen kesit zorları ve meset tepkileri

olmak üzere n. dereceden hiperstatik sistem için süperpozisyon denklemleri;

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + M_n X_n \\
N &= N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + N_n X_n \\
T &= T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + T_n X_n \\
R &= \underbrace{R_0}_{\text{Dış etkilerden}} + \underbrace{R_1 X_1 + R_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + R_n X_n}_{\text{Hiperstatik bilinmeyenlerden}}
\end{aligned}
$$

Olarak yazılır.

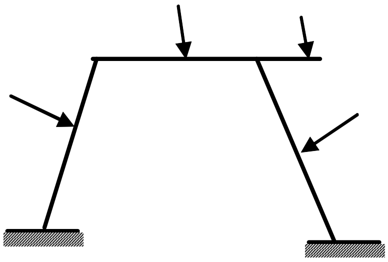
Geometrik uygunluk şartları (süreklilik denklemleri)

Hiperstatik sistemin kesim yapılan noktalarındaki geometrik uygunluk şartlarını ifade eden denklemlere ***süreklilik denklemleri*** denilmektedir.

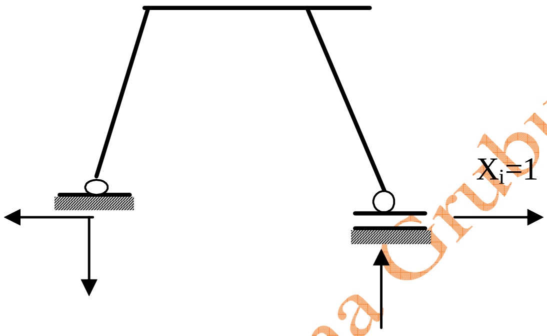
Bir hiperstatik sistemde hiperstatiklik derecesi kadar süreklilik denklemi yazılabilir. Süreklilik denklemlerinin yazılması için Virtüel İş Teoreminden yararlanılır.

(i) Sayılı Süreklilik Denkleminin Yazılması

Sistemde dış etki olarak yalnız dış yüklerin bulunması hali. (sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmeleri yok)



Hiperstatik Sistem
(Virtüel Şekildeğiştirme Durumu)



İzostatik Sistemde $X_i=1$ Durumu
(Yükleme Durumu)

	Hiperstatik Sistem (Dış Yükler)	İzostatik Esas Sistem ($X_i=1$ Durumu)
Kesit Zorları:	M, N, T	M_i, N_i, T_i
Şekil Değiştirmeler:	$\frac{\Delta\varphi}{ds}=\frac{M}{EI}$ $\frac{\Delta ds}{ds}=\frac{N}{EF}$ $\frac{\Delta v}{ds}=\frac{T}{GF'}$	

Virtüel İş Teoremi: $\boxed{\text{İç Kuvvetlerin İşi = Dış Kuvvetlerin İşi}}$

$$\boxed{\int M_i M \frac{ds}{EI} + \int N_i N \frac{ds}{EF} + \int T_i T \frac{ds}{GF'} = 0 \qquad (i = 1,2,3,.........n)}$$

Kapalı süreklilik denklemleri

M, N, T nin süperpozisyon denklemlerindeki ifadeleri yerine konarak denklem yeniden düzenlenirse,

$$\int M_i(M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + M_nX_n)\frac{ds}{EI} +$$
$$\int N_i(N_0 + N_1X_1 + N_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + N_nX_n)\frac{ds}{EF} +$$
$$\int T_i(T_0 + T_1X_1 + T_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + T_nX_n)\frac{ds}{GF'} = 0 \qquad (i = 1,2,3,.........n)$$

$$\underbrace{\int M_iM_0\frac{ds}{EI} + \int N_iN_0\frac{ds}{EF} + \int T_iT_0\frac{ds}{GF'}}_{\delta_{10}} + X_1\underbrace{\left(\int M_iM_1\frac{ds}{EI} + \int N_iN_1\frac{ds}{EF} + \int T_iT_1\frac{ds}{GF'}\right)}_{\delta_{i1}} + \cdots\cdots\cdots\cdots + X_n\underbrace{\left(\int M_iM_n\frac{ds}{EI} + \int N_iN_n\frac{ds}{EF} + \int T_iT_n\frac{ds}{GF'}\right)}_{\delta_{in}} = 0$$

$$\delta_{i0} + \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{in}X_n = 0 \qquad (i = 1,2,........n)$$

Bu denklem sistemi i=1,2 ......n için açık olarak yazılırsa ***açık süreklilik denklemi*** elde edilir.

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{1n}X_n = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{nn}X_n = 0 \end{array}}$$

Açık süreklilik denklemi

Açık süreklilik denkleminde katsayılar ve sabitler:

δij : X_j=1 yüklemesinden dolayı X_i bilinmeyeninin uygulama noktasının X_i bilinmeyeni doğrultusundaki yerdeğiştirmesidir. Bu katsayılar denklem takımının katsayıları adını alır.

$$\delta_{ij} = \int M_iM_j\frac{ds}{EI} + \int N_iN_j\frac{ds}{EF} + \int T_iT_j\frac{ds}{GF'}$$

Betti karşıtlık teoremi gereğince $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ bağıntısı vardır. Buna göre n. Dereceden hiperstatik bir sistemin hesabında tayin edilmesi gereken katsayıların sayısı n^2 yerine $\frac{n}{2}(n+1)$ olmaktadır.

δi_0 : X=0 yüklemesinden dolayı X_i bilinmeyeninin uygulama noktasının X_i bilinmeyeni doğrultusundaki yerdeğiştirmesidir. Bu katsayılar denklem takımının yük sabitleri adını alır.

$$\delta_{i0}=\int M_i M_0 \frac{ds}{EI}+\int N_i N_0 \frac{ds}{EF}+\int T_i T_0 \frac{ds}{GF'}$$

n. Dereceden hiperstatik bir sistemin hesabında tayin edilmesi gereken yük sabitlerinin sayısı (n) dir. Uygulamada genellikle uzama ve kayma deformasyonları eğilme deformasyonu yanında ihmal edilir. Bu durumda δij , δi_0 katsayıları daha basit bir şekilde ifade edilebilir.

$$\boxed{\delta_{ij}=\int M_i M_j \frac{ds}{EI} \quad , \quad \delta_{i0}=\int M_i M_0 \frac{ds}{EI}}$$

Uygulama: 3. Dereceden hiperstatik bir sistemde açık süreklilik denklemleri:

$$\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{31}X_3=0$$
$$\delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3=0$$
$$\delta_{30}+\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3=0$$

Hesaplanması gereken toplam 9 adet terim vardır

Katsayılar: $\frac{n}{2}(n+1)=\frac{3}{2}(3+1)=6$ adet $\rightarrow$ δ_{11}, $\delta_{12}=\delta_{21}$, $\delta_{13}=\delta_{31}$, δ_{22}, $\delta_{23}=\delta_{32}$, δ_{33}

Yük Sabitleri : n=3 adet $\rightarrow$ δ_{10} , δ_{20}, δ_{30}

Kafes sistemler

Kafes sistemlerde M≡T≡0 olduğu için sadece normal kuvvetler (çubuk kuvvetleri) sözkonusudur.

S_0 İES de X=0 yüklemesinden meydana gelen çubuk kuvvetleri

S_i İES de X_i=1 yüklemesinden meydana gelen çubuk kuvvetleri

olmak üzere, δij , δi_0 katsayıları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\boxed{\delta_{ij}=\sum_{çubuk} S_i S_j \frac{l}{EF} \qquad \delta_{i0}=\sum_{çubuk} S_i S_0 \frac{l}{EF}}$$

Hesapta izlenen yol

1. İzostatik esas sistem seçilir, hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.
2. X=0 yüklemesi yapılır M_0, N_0, T_0 diyagramları çizilir. (Uzama ve kayma deformasyonları terk edilmesi durumunda N_0, T_0 diyagramlarının çizilmesine gerek yoktur)
3. Xi=1 yüklemeleri yapılarak M_i, N_i, T_i diyagramları çizilir. Bu işlem i=1,2,........n kez tekrarlanır. (Uzama ve kayma deformasyonları terk edilmesi durumunda N_i, T_i diyagramlarının çizilmesine gerek yoktur)
4. Denklem takımının δ_{ij} katsayıları ve δ_{i0} yük sabitleri hesaplanır. Bu terimlerin hesabı için çarpım tablolarından yararlanılır.

   Uygulamada, paydada yer alan EI çarpanını kaldırmak için denklem takımının bütün terimleri EI_c ile çarpılarak δ_{ij} ve δ_{i0} yerine $EI_c\delta_{ij}$ ve $EI_c\delta_{i0}$ terimleri hesaplanır.

$$EI_c\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds + \cdots\cdots \quad , \quad EI_c\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{I_c}{I} ds + \cdots\cdots$$

   Burada I_c herhangi bir atalet momentidir. Genellikle çubukların atalet momentlerinin en küçük ortak katı olarak seçilir.

5. Denklem takımı kurulur ve çözülerek X_1, X_2, ...X_n hiperstatik bilinmeyenleri belirlenir.
6. Kesit zorları diyagramları çizilir. Bu işlem için iki yoldan yararlanılabilir.
   a) Süperpozisyon denklemleri ile: $M=M_0+M_1X_1+M_2X_2+.....M_nX_n$
   b) Dış yükler ve hiperstatik bilinmeyenler izostatik esas siteme yüklenerek
7. Sonuçlar kontrol edilir. Bunun için Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD) kullanılır. Hiperstatik sistemin M, N, T diyagramlarının

$$\int M_i M \frac{ds}{EI} + \int N_i N \frac{ds}{EF} + \int T_i T \frac{ds}{GF'} = 0 \qquad (\mathrm{i} = 1,2,3,.........\mathrm{n})$$

   kapalı süreklilik denklemlerini %0.5-%1.0 rölatif hata ile sağlaması gerekmektedir. Uzama ve kayma deformasyonları terk ediliyorsa

$$\int M_i M \frac{ds}{EI} = 0 \qquad (\mathrm{i} = 1,2,3,.........\mathrm{n})$$

   yazılması yeterlidir. Bu kontrol n adet kapalı süreklilik denklemi için tekrar edilmelidir.

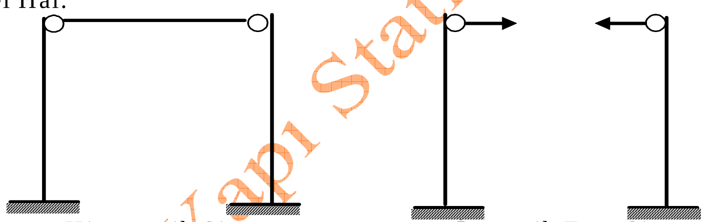
$$Rölatif\ Hata = \frac{(+)Terimlerin\ \ Toplamı - (-)Terimlerin\ \ Toplamı}{(+)\ ve\ (\text{-})\ Terimlerin\ Toplamlarının\ Ortalaması}$$

İzostatik esas sistem seçilmesinde dikkat edilecek noktalar

Bir hiperstatik sistemden çok sayıda esas sistem seçilebilir. Bunu yaparken dikkat edilecek en önemli nokta seçilen sistemin ***oynak*** olmamalıdır.

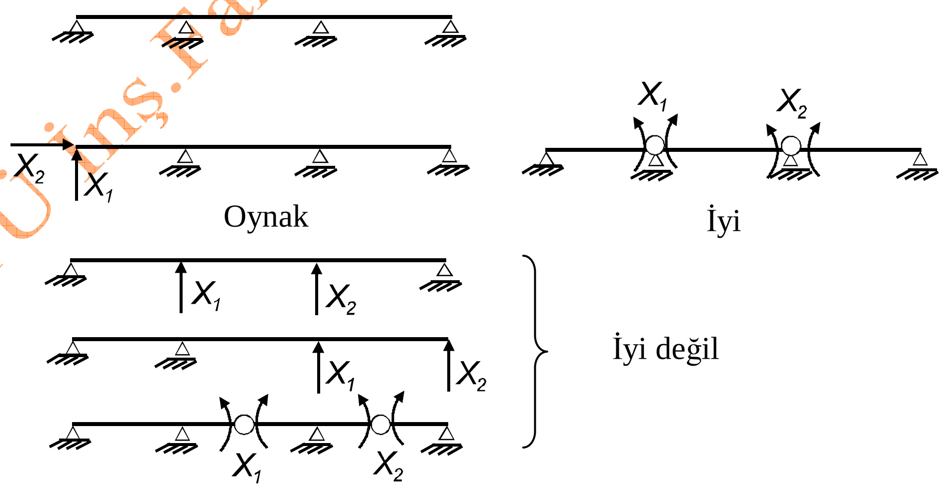
1. İçten hiperstatik sistemlerde mutlaka kesit zoru kaldırılmalıdır.
2. İçten ve dıştan hipersataik sistemlerde en az içten hiperstatiklik derecesi kadar iç kuvvet kaldırılmalıdır.
3. Kesit zorlarının kaldırılması halinde birim yüklemeler zıt yönlü çift moment veya çift kuvvettir.
4. X=0 ve birim yükleme diyagramları kolay çizilebilmeli, sistem üzerinde dallanmamalı ve ordinatları birbirinden çok farklı olmamalıdır.
   - İzostatik esas sistemin basit kiriş, basit çerçeve veya bunların birleşmesinden oluşan bir sistem olması sağlanmalıdır.
   - Üç mafsallı çerçeve, gerber kirişi gibi M_0 ve M_i diyagramları daha zor çizilen sistemlerden kaçınılmalıdır.
   - Bazı özel haller dışında genel olarak büyük konsollu sistemlerde kaçınılmalıdır.

Özel Hal:

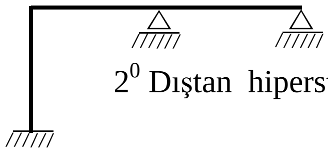


Hiperstatik Sistem　　　　Izostatik Esas Sistem

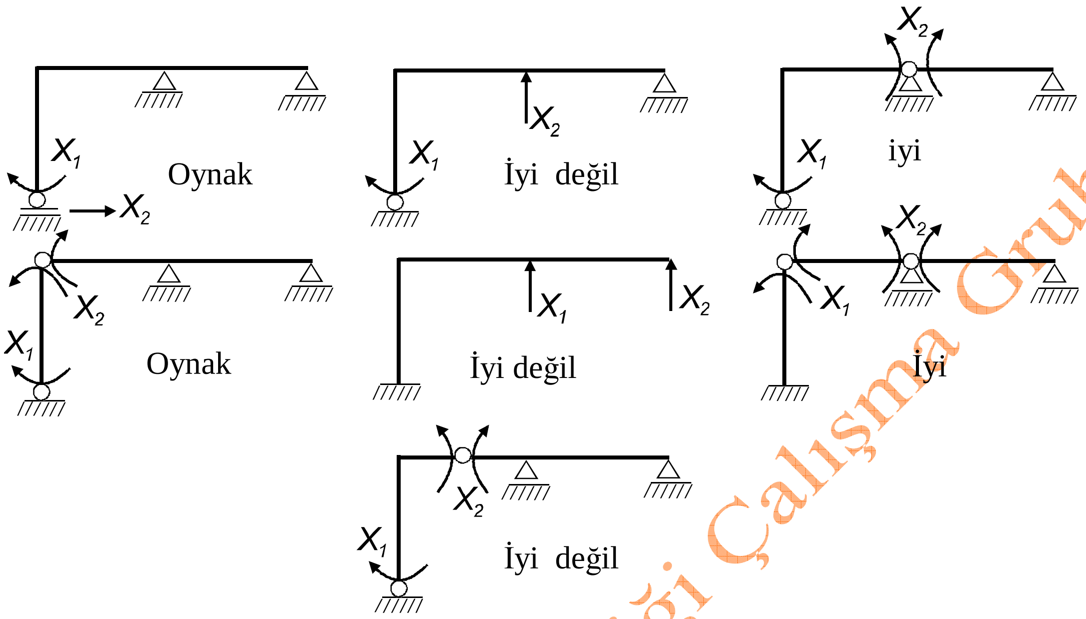
Örnekler:

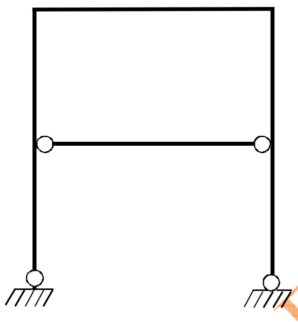


Örnekler:

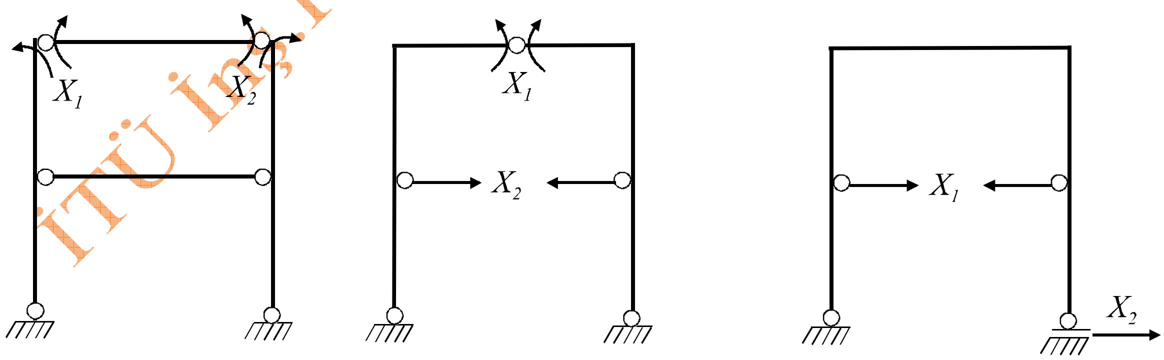


2^0 Dıştan hiperstatik





1^0 İçten
1^0 Dıştan
2^0 Hiperstatik sistem



Oynak İyi değil İyi