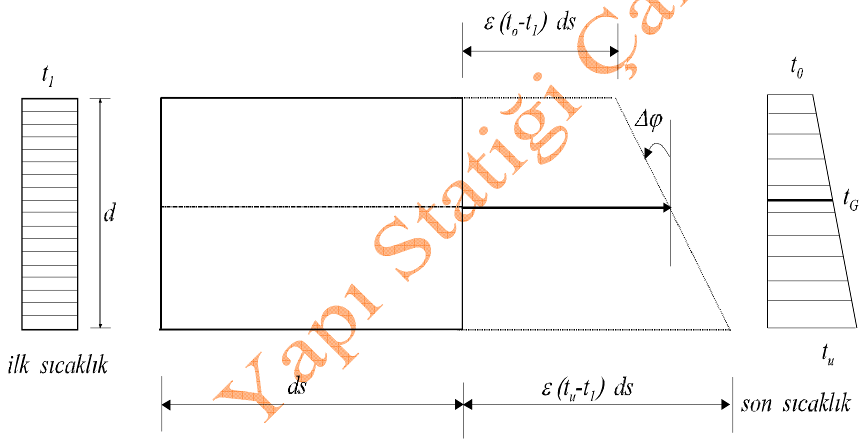
Dış Etki Olarak Sıcaklık Değişmesi ve/veya Mesnet Çökmelerinin Göz Önüne Alınması Durumu

Dış etki olarak göz önüne alınan sıcaklık değişimi ve mesnet çökmeleri hiperstatik sistemlerde şekil değiştirme ile birlikte kesit zoru da meydana getirir.

Sıcaklık değişimi:

Tanımlar:

ε	Uzama (genleşme) katsayısı (beton ve çelikte : $\varepsilon = 10^{-5}$ m/m^{0}C)
d	Kesit yüksekliği
t_1	İlk sıcaklık
t_o	Üst liflerdeki son sıcaklık
t_u	Alt liflerdeki son sıcaklık
t_G	Çubuk eksenindeki son sıcaklık



Yapı sistemlerinin hesabında iki tür sıcaklık değişimi söz konusudur.

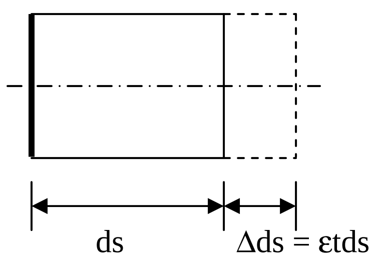
- (t) Düzgün sıcaklık değişmesi
- (Δt) Farklı sıcaklık değişmesi

Düzgün sıcaklık değişmesi, (t):

Düzgün sıcaklık değişimi çubuk eksenindeki sıcaklık değişmesidir. ($t = t_G - t_1$)
Düzgün sıcaklık değişmesinden dolayı çubuk elemanda yalnız boy değişmesi meydana gelir.

$\Delta ds = \varepsilon\, tds$

$$\boxed{\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon\, t}$$

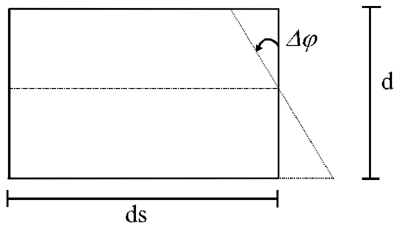


Farklı sıcaklık değişmesi, (Δt):

Farklı sıcaklık değişmesi çubuğun alt ve üst lifler arasındaki sıcaklık farkıdır. ($\Delta t = t_o - t_u$)

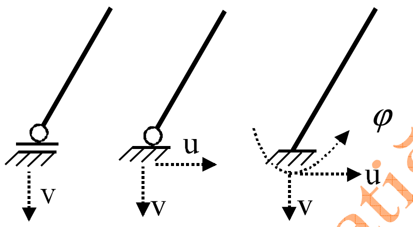
Farklı sıcaklık değişmesinden dolayı çubuk elemanda yalnız dönme oluşur.

$$\boxed{\frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon\,\Delta t}{d}}$$



Mesnet Çökmeleri:

Mesnet çökmeleri mesnetlerde meydana gelen ve mesnet tanımına uymayan yerdeğiştirmelerdir.



u,v : Doğrulsal (lineer) mesnet çökmeleri (m),
φ : Açısal mesnet çökmesi (radyan)

Hiperstatik sistemlerin Kuvvet Yöntemi ile hesabında dış etki olarak sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmelerinin göz önüne alınması durumunda aşağıda verilen yol izlenir.

Süperpozisyon Denklemleri:

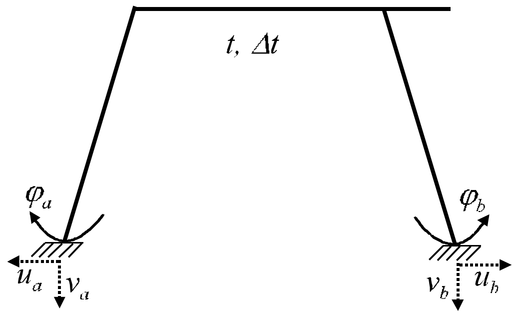
Hiperstatik sisteme dış etki olarak sıcaklık değişmesi ve/veya mesnet çökmelerinin etkimesi halinde süperpozisyon denklemlerinde kavramsal olarak herhangi bir değişiklik yoktur. Ancak İzostatik sistemlerde sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmelerinden dolayı kesit zoru meydana gelmediği için, İES de dış etkilerden (sıcaklık değişmesi ve /veya mesnet çökmesi) meydana gelen $M_0 \equiv N_0 \equiv T_0$ dır. Bu durumda süperpozisyon denklemleri:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + M_n X_n$$
$$N = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + N_n X_n$$
$$T = T_1 X_1 + T_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + T_n X_n$$
$$R = R_1 X_1 + R_2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + R_n X_n$$

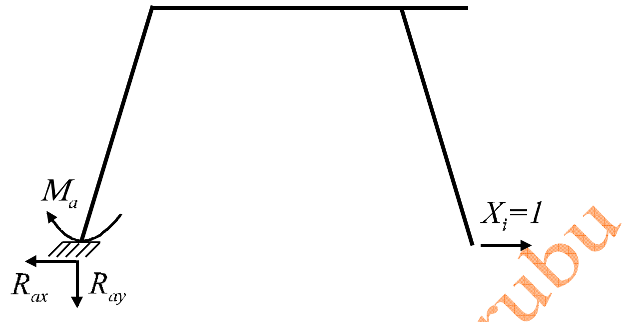
şeklini alır.

(i) Sayılı süreklilik denkleminin yazılması

Sistemde dış etki olarak sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmeleri bulunması hali.



Hiperstatik sistem
(Virtüel şekildeğiştirme durumu)



İzostatik esas sistemde $X_i=1$ durumu
(Yükleme durumu)

	Hiperstatik Sistem (Dış Etki-Sıcaklık Değişimi, Mesnet Çökmesi)	İzostatik Esas Sistem (X_i=1 Durumu)
Kesit Zorları :	M, N, T	M_i, N_i, T_i

Şekildeğiştirmeler :

$$\frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{\varepsilon\,\Delta t}{d}$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \varepsilon\ t$$

$$\frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'}$$

Virtüel İş Teoremi: İç Kuvvetlerin İşi = Dış Kuvvetlerin İşi

$$\int M_i M \frac{ds}{EI} + \int N_i N \frac{ds}{EF} + \int T_i T \frac{ds}{GF'} + \underbrace{\int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon\ t ds}_{\delta_{it}} = \underbrace{\mathrm{R}_{xa} u_a + \mathrm{R}_{ya}\,\mathrm{v}_a + \mathrm{M}_a\,\varphi_a + 1.\mathrm{u}_b}_{\mathrm{J}_i}$$

(i = 1,2,3,.........n)

Kapalı Süreklilik Denklemleri

M, N, T nin süperpozisyon denklemlerindeki ifadeleri kapalı süreklilik denklemlerinde yerine konarak denklem yeniden düzenlenirse,

$$\int M_i (M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots\cdots + M_n X_n)\frac{ds}{EI} +$$

$$\int N_i (N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots\cdots + N_n X_n)\frac{ds}{EF} +$$

$$\int T_i (T_1 X_1 + T_2 X_2 + \cdots\cdots + T_n X_n)\frac{ds}{GF'} +$$

$$\int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon\ t ds = \mathrm{R}_{xa} u_a + \mathrm{R}_{ya}\ \mathrm{v_a}\ + \mathrm{M_a}\ \varphi_a + 1.\mathrm{u_b} \qquad (\mathrm{i} = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \mathrm{n})$$

$$\underbrace{\int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon\ t ds}_{\delta_{it}} + X_1 \underbrace{\left(\int M_i M_1 \frac{ds}{EI} + \int N_i N_1 \frac{ds}{EF} + \int T_i T_1 \frac{ds}{GF'}\right)}_{\delta_{i1}} + \cdots\cdots\cdots + X_n \underbrace{\left(\int M_i M_n \frac{ds}{EI} + \int N_i N_n \frac{ds}{EF} + \int T_i T_n \frac{ds}{GF'}\right)}_{\delta_{in}} = \underbrace{\mathrm{R}_{xa} u_a + \mathrm{R}_{ya}\ \mathrm{v_a}\ + \mathrm{M_a}\ \varphi_a + 1.\mathrm{u_b}}_{\mathrm{J_i}}$$

$$\delta_{it} + \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \cdots\cdots + \delta_{in} X_n = J_i \qquad (\mathrm{i} = 1,2, \ldots\ldots \mathrm{n})$$

Bu denklem sistemi i=1,2 ......n için açık olarak yazılırsa **Açık Süreklilik Denklemi** elde edilir.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\delta_{1t} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \cdots\cdots + \delta_{1n} X_n = J_1 \\
\delta_{2t} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \cdots\cdots + \delta_{2n} X_n = J_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\delta_{nt} + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \cdots\cdots + \delta_{nn} X_n = J_n
\end{array}}$$

Açık Süreklilik Denklemleri

Açık süreklilik denkleminde katsayılar ve sabitler:

δ_{ij} : Denklem takımının daha önce açıklanan katsayılarıdır.

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} + \int N_i N_j \frac{ds}{EF} + \int T_i T_j \frac{ds}{GF'}$$

δ_{i0} : Dış yük söz konusu olmadığı için sıfırdır.

Uygulamada genellikle uzama ve kayma deformasyonları eğilme deformasyonu yanında ihmal edilir. Bu durumda δ_{ij} katsayıları daha basit bir şekilde sadece M fonksiyonlarına bağlı olarak yazılabilir. ifade edilebilir.

δ_{it} : Sıcaklık değişmesinden dolayı X_i bilinmeyeninin uygulama noktasının yerdeğiştirmesidir. ***Sıcaklık değişmesi terimi*** adını alır.

$$\boxed{\delta_{it} = \int M_i \frac{\varepsilon \ \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon \ t ds = \sum_{çubuk} \frac{\varepsilon \ \Delta t}{d} \int M_i ds + \sum_{çubuk} \varepsilon \ t \int N_i ds}$$

şeklinde hesaplanır.

Sistemde dış etki olarak yalnız t düzgün sıcaklık yüklemesi varsa, Δt=0 olacağı için birinci terim sıfır olur sadece ikinci terim kalır.
Sistemde dış etki olarak yalnız Δt farklı sıcaklık yüklemesi varsa, t=0 olacağı için ikinci terim sıfır olur sadece birinci terim kalır.

J_i : X_i=1 yüklemesindeki dış kuvvetlerin (birim yükleme ve mesnet tepkileri) sistemin verilen mesnet çökmelerinde yaptıkları işlerdir.

X_i=1 yüklemesindeki dış kuvvetlerin (birim yükleme ve mesnet tepkilerinin) verilen mesnet çökmeleri ile karşılıklı olarak çarpımlarının toplamı olarak hesaplanır.

$J_i = \sum (X_i = 1$ Yüklemesindeki dış kuvvetler, mesnet tepkileri * bu kuvvetler doğrultusundaki mesnet çökmeleri)

Hesapta izlenen yol

1. İzostatik esas sistem seçilir, hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.
2. Xi=1 yüklemeleri yapılarak M_i diyagramları çizilir. Bu işlem i=1,2,........n kez tekrarlanır. t düzgün sıcaklık değişmesi için hesap yapılıyorsa N_i diyagramları da çizilmelidir.(N_i diyagramları uzama şekildeğiştirmelerinin terk edilmesi durumunda da çizilmelidir)
3. Denklem takımının δ_{ij} katsayıları ve δ_{it} sıcaklık değişmesi terimleri ve J_i mesnet çökmesi terimleri hesaplanır.

   Uygulamada, EI_c çarpanı ile çalışılıyorsa:

$$EI_c\delta_{it} = EI_c\int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + EI_c\int N_i\varepsilon\ tds = EI_c\left[\sum_{çubuk}\frac{\varepsilon\ \Delta t}{d}\int M_i ds + \sum_{çubuk}\varepsilon\ t\int N_i ds\right]$$

$$\mathrm{EI_cJ_i} = \mathrm{EI_c}\sum(X_i = 1 \text{ Yüklemesindeki dış kuvvetler, mesnet tepkileri * bu kuvvetler doğrultusundaki mesnet çökmeleri})$$

   Görüldüğü gibi EI_c çarpan olarak kalmaktadır. Bu durumda bu çarpanın sayısal değeri bilinmelidir.
4. Denklem takımı kurulur ve çözülerek X_1, X_2, ...X_n hiperstatik bilinmeyenleri belirlenir.
5. Kesit zorları diyagramları çizilir. Bu işlem için iki yoldan yararlanılabilir.
   - (i) Süperpozisyon denklemleri kullanılarak ($M=M_1X_1+M_2X_2+.....M_nX_n$)
   - (ii) Dış yükler ve hiperstatik bilinmeyenler izostatik esas siteme yüklenerek
6. Sonuçlar kontrol edilir. Bunun için Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD) kullanılır. Hiperstatik sistemin M diyagramının kapalı süreklilik denklemlerini %0.5-%1.0 rölatif hata ile sağlaması gerekmektedir.

$$\int M_i M\frac{I_c}{I}ds + \underbrace{EI_c\int M_i\frac{\varepsilon\ \Delta t}{d}ds + EI_c\int N_i\varepsilon\ tds}_{\mathrm{EI_c}\,\delta_{\mathrm{it}}} = EI_cJ_i \qquad (i=1,2,3,.........n)$$

$$\int M_i M\frac{I_c}{I}ds + EI_c\delta_{\mathrm{it}} = EI_cJ_i \qquad (i=1,2,3,........n)$$

Görüldüğü gibi $EI_c\delta_{it}$ ve EI_cJ_i terimleri kapalı süreklilik denkleminin içinde de yer almaktadır. Bu durumda bu terimlerin kontrolü yapılmamış olmaktadır.

Açık süreklilik denklemlerinin matris gösterilimi ile yazılması

(n) bilinmeyenli bir sisteme ait açık süreklilik denklemi:

$$
\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots\cdots+\delta_{1n}Xn_1+\delta_{i0}+\delta_{1t}-J_1=0\\
&\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots\cdots+\delta_{2n}Xn_1+\delta_{20}+\delta_{2t}-J_2=0\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots\cdots+\delta_{nn}Xn_1+\delta_{n0}+\delta_{nt}-J_n=0
\end{aligned}
$$

Bu denklemlerdeki terimler matris formunda gösterilirse:

$$
[\delta]=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix},\qquad [\mathrm{X}]=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix},\qquad [\delta_0]=\begin{bmatrix}\delta_{10}+\delta_{1t}-J_1\\ \delta_{20}+\delta_{2t}-J_2\\ \vdots\\ \delta_{n0}+\delta_{nt}-J_n\end{bmatrix}
$$

Katsayı lar Matrisi (n * n) : Kare Matris — Bilinmiyenler Matrisi (n * 1) : Kolon Matris — Sabitler Matrisi (n * 1) : Kolon Matris

Açık süreklilik denklemi matris formunda : $[\delta][X]+[\delta_0]=0$ olarak yazılabilir.

β Sayıları

Hipersatatik sistemin çok sayıda farklı yükleme için ayrı ayrı hesabı gerektiği durumlarda ve hiperstatik sistemlerin tesir çizgilerinin çiziminde de β sayılarından yararlanır.

Tanım: β_{ij} : Açık süreklilik denklemlerinde $\delta_{j0}=1$ diğer bütün sabitler sıfır iken X_i hiperstatik bilinmeyeninin aldığı değerdir.

Örnek: 3 bilinmeyenli, bir sistemde:

$$
\left.\begin{array}{l}[\delta][X]+[\bar{\delta}_0]=0\\ [\bar{\delta}_0]=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\end{array}\right\}\begin{array}{l}X_1=\beta_{11}\\X_2=\beta_{21}\\X_3=\beta_{31}\end{array}\qquad
\left.\begin{array}{l}[\delta][X]+[\bar{\delta}_0]=0\\ [\bar{\delta}_0]=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right\}\begin{array}{l}X_1=\beta_{12}\\X_2=\beta_{22}\\X_3=\beta_{32}\end{array}\qquad
\left.\begin{array}{l}[\delta][X]+[\bar{\delta}_0]=0\\ [\bar{\delta}_0]=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{array}\right\}\begin{array}{l}X_1=\beta_{13}\\X_2=\beta_{23}\\X_3=\beta_{33}\end{array}
$$

n bilinmeyenli bir sistemde;

$$\left.\begin{array}{l}(i=1,2,\ldots\ldots n)\\(j=1,2,\ldots\ldots n)\end{array}\right\}\quad \beta_{ij}\Rightarrow$$ olmak üzere n^2 adet β sayısı vardır .

β sayılarını hesaplamak için denklem takımının (n) kez çözülmesi gerekir. Bir hiperstatik sistemde β sayıları biliniyorsa sisteme etkiyen herhangi bir yükleme için hesap yapılırken denklem takımının tekrar çözülmesine gerek yoktur. Verilen yükleme için δ_{i0} yükleme terimleri hesaplandıktan sonra hiperstatik bilinmeyenler; $[X]=[\beta][\delta_0]$ olarak hesaplanabilir. Burada [β] matrisi,

$$[\beta]=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$ yazılabilir.

Hiperstatik bilinmeyenlerin açık ifadeleri ise;

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_{11}\delta_{10} + \beta_{12}\delta_{20} + \cdots\cdots\cdots \beta_{1n}\delta_{n0} \\ X_1 &= \beta_{21}\delta_{10} + \beta_{22}\delta_{20} + \cdots\cdots\cdots \beta_{2n}\delta_{n0} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ X_1 &= \beta_{n1}\delta_{10} + \beta_{n2}\delta_{20} + \cdots\cdots\cdots \beta_{nn}\delta_{n0} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

- Bir hiperstatik sisteme etkiyen yükleme sayısı (m) sistemin hiperstatiklik derecesi (n) den büyükse yani m>n ise hipersatatik bilinmeyenlerin hesabı için β sayılarından yararlanmak uygun olmaktadır.
- Hiperstatik sistemin çözümü için δ_{ij} ler yerine $EI_c\delta_{ij}$ ler hesaplanmış ve β sayılarının hesabında bunlar kullanılmış ise gerçek β lar yerine β/EI_c sayıları hesaplanmış olmaktadır.

[β] Matrisinin özellikleri

[β] matrisi esas köşegenine göre simetriktir. $\boxed{\beta_{ij}=\beta_{ji}}$

1. [β] Matrisinin esas köşegeni üzerindeki bütün terimler negatiftir. $\boxed{\beta_{ii}< 0}$
2. [β] Matrisi, (-) işaretle [δ] matrisinin tersine (inversine) eşittir. $\boxed{[\beta]=-[\delta]^{-1}}$

Yani: [I] : Birim matris olmak üzere $\boxed{[\beta][\delta]=[I]}$ yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

Bu özellikler [β] matrisinin kontrolünde kullanılır.